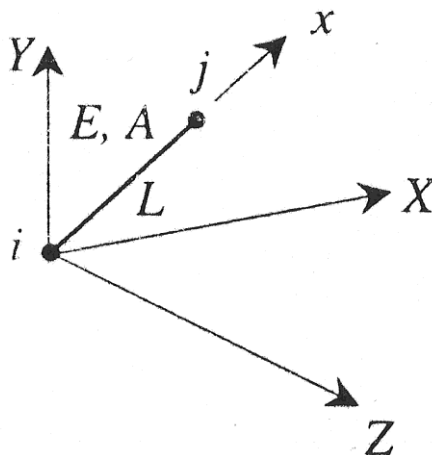


Metody Komputerowe Metoda Elementów Skończonych

Element trójwymiarowy liniowy : pręt 3D

Jest to element trójwymiarowy o różnych współrzędnych lokalnych i globalnych węzłów – niezbędne są transformacje układów współrzędnych. Jego sztywność zdefiniowana jest pośrednio, za pomocą pola przekroju A , długości L oraz modułu Younga E . Transformacje wyrażone są za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta nachylenia elementu w stosunku do osi x globalnego układu współrzędnych, mierzonego w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Element ma dwa węzły definiujące jego końce. Każdy węzeł ma trzy stopnie swobody.



Jeśli każdy węzeł może przemieścić się w kierunku osi x i y (ma dwa stopnie swobody), to macierz sztywności elementu zdefiniowanego dwoma węzłami (a więc czterema stopniami swobody) zapisuje się jako macierz 4×4 (każdy wymiar macierzy to liczba stopni swobody całego elementu):

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ c_y c_x & c_y^2 & c_y c_z & -c_y c_x & -c_y^2 & -c_y c_z \\ c_z c_x & c_z c_y & c_z^2 & -c_z c_x & -c_z c_y & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_y c_x & -c_y^2 & -c_y c_z & c_y c_x & c_y^2 & c_y c_z \\ -c_z c_x & -c_z c_y & -c_z^2 & c_z c_x & c_z c_y & c_z^2 \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$c_x = \cos(\theta_x),$$

$$c_y = \cos(\theta_y),$$

$$c_z = \cos(\theta_z).$$

Jeśli w całym układzie wielu połączonych ze sobą elementów wystąpi n węzłów, to macierz sztywności będzie miała wymiar $3n \times 3n$. W dalszym ciągu obowiązuje ogólny układ równań liniowych metody:

$$[K]\{u\} = \{f\}$$

gdzie: $[K]$ – macierz sztywności, $\{u\}$ – wektor przemieszczeń węzłów, $\{f\}$ – wektor sił działających w węzłach. Jak w poprzednich lekcjach, jeśli znamy sztywność elementu oraz przemieszczenia węzłów – możemy wyliczyć działające siły, a jeśli znamy siły, to po rozwiązaniu układu równań możemy wyliczyć przemieszczenia. Siły w elementach wyznacza się z następującego związku:

$$f = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -c_x & -c_y & -c_z & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \{u\},$$

gdzie $\{u\}$ jest 6-elementowym wektorem kolumnowym, zawierającym przemieszczenia węzłów definiujących dany element. Wartość naprężenia w elemencie wyznaczana jest przez stosunek siły f do pola przekroju poprzecznego A . Funkcje realizujące obliczenia MES na elementach prętowych 3D w Matlabie (należy je umieścić w osobnych plikach M-File, nadając im nazwy takie, jakie mają zawarte w nich funkcje):

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: DlugoscKatElementPretowy3D.m

```
function [L, Thx, Thy, Thz]= DlugoscKatElementPretowy3D(x1,y1,z1,x2,y2,z2)
%funkcja wyznacza dlugosc L i katy nachylenia elementu pretowego 3D na podstawie
%wspolrzednych jego wezlow (katy w stopniach)
v1 = [x2-x1; y2-y1; z2-z1];
L = norm(v1);
Thx = acos(dot(v1./L,[1;0;0]))*180/pi;
Thy = acos(dot(v1./L,[0;1;0]))*180/pi;
Thz = acos(dot(v1./L,[0;0;1]))*180/pi;
```

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: SztywnoscElementPretowy3D.m

```
function y = SztywnoscElementPretowy3D(E,A,L,Thx,Thy,Thz)
%funkcja tworzy macierz sztywnosci dla pojedynczego elementu pretowego 3D
%katy Thx, Thy i Thz podajemy w stopniach
%wymiar wyniku : 6x6
x = Thx*pi/180;
u = Thy*pi/180;
v = Thz*pi/180;
Cx = cos(x);
Cy = cos(u);
Cz = cos(v);
w = [Cx*Cx Cx*Cy Cx*Cz ; Cy*Cx Cy*Cy Cy*Cz ; Cz*Cx Cz*Cy Cz*Cz];
y = E*A/L*[w -w ; -w w];
```

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: ZlozSztywnoscPretow3D.m

```
function y = ZlozSztywnoscPretow3D(K,k,i,j)
%funkcja sklada w jedna macierz sztywnosci K wszystkie prety 3D
%w zadaniu laczac wszystkie sztywnosci pojedynczych elementow k
%zdefiniowanych wezlami i j
%UWAGA! Funkcja moze byc wywolana po wcześniejszym uruchomieniu
%funkcji SztywnoscElementPretowy3D!

%skladanie
K(3*i-2,3*i-2) = K(3*i-2,3*i-2) + k(1,1);
K(3*i-2,3*i-1) = K(3*i-2,3*i-1) + k(1,2);
K(3*i-2,3*i) = K(3*i-2,3*i) + k(1,3);
K(3*i-2,3*j-2) = K(3*i-2,3*j-2) + k(1,4);
K(3*i-2,3*j-1) = K(3*i-2,3*j-1) + k(1,5);
K(3*i-2,3*j) = K(3*i-2,3*j) + k(1,6);
K(3*i-1,3*i-2) = K(3*i-1,3*i-2) + k(2,1);
K(3*i-1,3*i-1) = K(3*i-1,3*i-1) + k(2,2);
K(3*i-1,3*i) = K(3*i-1,3*i) + k(2,3);
K(3*i-1,3*j-2) = K(3*i-1,3*j-2) + k(2,4);
K(3*i-1,3*j-1) = K(3*i-1,3*j-1) + k(2,5);
```

```

K(3*i-1,3*j) = K(3*i-1,3*j) + k(2,6);
K(3*i,3*i-2) = K(3*i,3*i-2) + k(3,1);
K(3*i,3*i-1) = K(3*i,3*i-1) + k(3,2);
K(3*i,3*i) = K(3*i,3*i) + k(3,3);
K(3*i,3*j-2) = K(3*i,3*j-2) + k(3,4);
K(3*i,3*j-1) = K(3*i,3*j-1) + k(3,5);
K(3*i,3*j) = K(3*i,3*j) + k(3,6);
K(3*j-2,3*i-2) = K(3*j-2,3*i-2) + k(4,1);
K(3*j-2,3*i-1) = K(3*j-2,3*i-1) + k(4,2);
K(3*j-2,3*i) = K(3*j-2,3*i) + k(4,3);
K(3*j-2,3*j-2) = K(3*j-2,3*j-2) + k(4,4);
K(3*j-2,3*j-1) = K(3*j-2,3*j-1) + k(4,5);
K(3*j-2,3*j) = K(3*j-2,3*j) + k(4,6);
K(3*j-1,3*i-2) = K(3*j-1,3*i-2) + k(5,1);
K(3*j-1,3*i-1) = K(3*j-1,3*i-1) + k(5,2);
K(3*j-1,3*i) = K(3*j-1,3*i) + k(5,3);
K(3*j-1,3*j-2) = K(3*j-1,3*j-2) + k(5,4);
K(3*j-1,3*j-1) = K(3*j-1,3*j-1) + k(5,5);
K(3*j-1,3*j) = K(3*j-1,3*j) + k(5,6);
K(3*j,3*i-2) = K(3*j,3*i-2) + k(6,1);
K(3*j,3*i-1) = K(3*j,3*i-1) + k(6,2);
K(3*j,3*i) = K(3*j,3*i) + k(6,3);
K(3*j,3*j-2) = K(3*j,3*j-2) + k(6,4);
K(3*j,3*j-1) = K(3*j,3*j-1) + k(6,5);
K(3*j,3*j) = K(3*j,3*j) + k(6,6);

```

%i wynik zwracany przez funkcje
y = K;

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: SilyElementPretowy3D.m

```

function y = SilyElementPretowy3D(E,A,L,Thx,Thy,Thz,u)
%funkcja wylicza sily wezlowe na podstawie znanych przemieszczen u,
%geometrii pręta oraz E
cx = cos(Thx.*pi./180);
cy = cos(Thy.*pi./180);
cz = cos(Thz.*pi./180);
y = E*A/L*[-cx -cy -cz cx cy cz]*u;

```

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: NaprezeniaElementPretowy3D.m

```

function y = NaprezeniaElementPretowy3D(E,L,Thx,Thy,Thz,u)
%funkcja wylicza naprezenia dla danego elementu na podstawie znanych
przemieszczen u, geometrii elementu i E
cx = cos(Thx.*pi./180);
cy = cos(Thy.*pi./180);
cz = cos(Thz.*pi./180);
y = E/L*[-cx -cy -cz cx cy cz]*u;

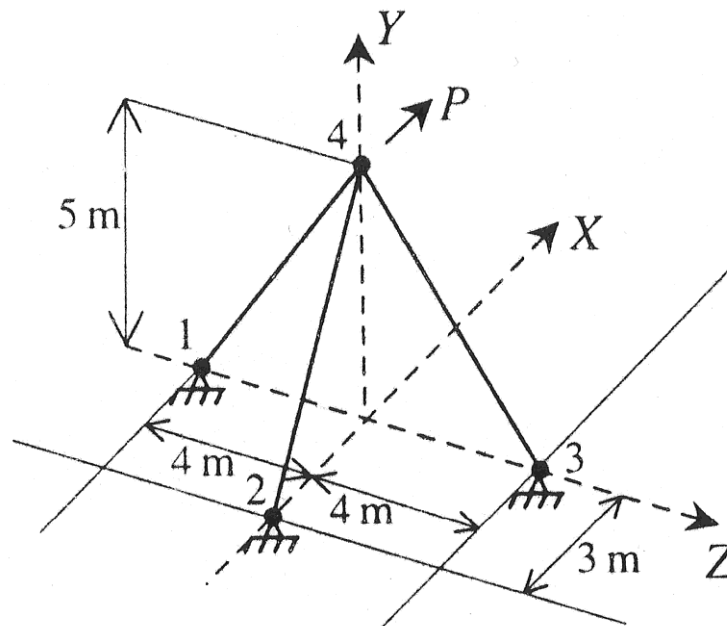
```

Przykład nr 1.

Dla podanego układu elementów wykonanych z materiału o znanym module $E = 200\text{GPa}$ i polach przekroju: $A_1 = 0.001\text{m}^2$, $A_2 = 0.002\text{m}^2$, $A_3 = 0.001\text{m}^2$ oraz sile obciążającej $P=12\text{kN}$ (jak na rysunku) wyznaczyć poniższe niewiadome:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzła nr 4

3. reakcje w węzłach nr 1, 2 i 3
4. siłę i naprężenie w każdym elemencie.



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania

Zadanie jest już podzielone na elementy i węzły :

- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr $i=1$ i $j=4$
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr $i=2$ i $j=4$
- element nr 3 zdefiniowany jest węzłami nr $i=3$ i $j=4$

W węzłach nr 1, 2 i 3 są podpory przegubowo-nieprzesuwne.

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Wprowadzamy zmienne globalne, które przechowują dane materiałowe i geometryczne naszego zadania: współrzędne węzłów $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4$, E, A . Pozostałe stałe geometryczne ($L_1, L_2, L_3, \text{Thx}_1, \text{Thx}_2, \text{Thx}_3, \text{Thy}_1, \text{Thy}_2, \text{Thy}_3, \text{Thz}_1, \text{Thz}_2, \text{Thz}_3$) wyznaczamy ze współrzędnych węzłów (Th: kąty nachylenia elementów do poszczególnych osi współrzędnych układu, zorientowane względem dodatniego zwrotu tych osi) (UWAGA! W celu poprawienia przejrzystości wyświetlanych wyników: `>>format short`)

```
>>x1=0
>>y1=0
>>z1=-4
>>x2=-3
>>y2=0
>>z2=0
>>x3=0
>>y3=0
>>z3=4
>>x4=0
>>y4=5
>>z4=0
>>E=200e6
>>A1=0.001
>>A2=0.002
>>A3=0.001
```

```
>>[L1,Thx1,Thy1,Thz1]=DlugoscKatElementPretowy3D(x1,y1,z1,x4,y4,z4)
>>[L2,Thx2,Thy2,Thz2]=DlugoscKatElementPretowy3D(x2,y2,z2,x4,y4,z4)
>>[L3,Thx3,Thy3,Thz3]=DlugoscKatElementPretowy3D(x3,y3,z3,x4,y4,z4)
```

Mamy trzy elementy, zatem tworzymy trzy macierze sztywności : k1, k2 i k3 komendami:

```
>>k1=SztynoscElementPretowy3D(E,A1,L1,Thx1,Thy1,Thz1)
>>k2=SztynoscElementPretowy3D(E,A2,L2,Thx2,Thy2,Thz2)
>>k3=SztynoscElementPretowy3D(E,A3,L3,Thx3,Thy3,Thz3)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Ponieważ w układzie mamy 4 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 12x12. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(12,12)
```

Ponieważ mamy trzy elementy, to funkcję ZlozSztynoscPretow3D trzeba wywołać trzy razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (k1, k2, a potem k3) i numery węzłów definiujące dany element (najpierw 1 i 4, potem 2 i 4 i na końcu 3 i 4):

```
>>K=ZlozSztynoscPretow3D(K,k1,1,4)
>>K=ZlozSztynoscPretow3D(K,k2,2,4)
>>K=ZlozSztynoscPretow3D(K,k3,3,4)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów (PROSZĘ KONTROLOWAĆ ZMIANIAJĄCE SIĘ WARTOŚCI!).

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Układ równań $[K]\{u\}=\{f\}$ można rozpisać w postać:

$$K * \begin{Bmatrix} u1x \\ u1y \\ u1z \\ u2x \\ u2y \\ u2z \\ u3x \\ u3y \\ u3z \\ u4x \\ u4y \\ u4z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1x \\ f1y \\ f1z \\ f2x \\ f2y \\ f2z \\ f3x \\ f3y \\ f3z \\ f4x \\ f4y \\ f4z \end{Bmatrix}$$

gdzie K jest macierzą 12x12.

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- przemieszczenie węzła nr 1 jest niemożliwe – podpora: $u1x = 0$, $u1y = 0$, $u1z = 0$,
- przemieszczenie węzła nr 2 jest niemożliwe – podpora: $u2x = 0$, $u2y = 0$, $u2z = 0$,
- przemieszczenie węzła nr 3 jest niemożliwe – podpora: $u3x = 0$, $u3y = 0$, $u3z = 0$,

- w węźle nr 4 jest obciążenie działające w kierunku osi x: $f4x = 12, f4y = 0, f4z = 0$.

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$K * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u4x \\ u4y \\ u4z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1x \\ f1y \\ f1z \\ f2x \\ f2y \\ f2z \\ f3x \\ f3y \\ f3z \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem przemieszczenia $u4x$, $u4y$ i $u4z$ oraz reakcji $f1x, f1y, f1z, f2x, f2y, f2z, f3x, f3y$ i $f3z$ (podpory).

Krok 5 – rozwiązanie równań

Przyglądając się układowi równań zauważymy, że można go rozwiązać „po kawałku”, wykreślając wiersze i kolumny odpowiadające zerowym przemieszczeniom węzłów, tzn. można usunąć wiersze i kolumny K od 1 do 9. W Matlabie realizujemy to poleceniami:

- skopiowanie wierszy od 10 do 12 i kolumn od 10 do 12 z K do k:

```
>>k=K(10:12,10:12)
```

- stworzenie wektora wyrazów wolnych (prawej strony równania) ze znanymi siłami $f4x=12\text{kN}$ oraz $f4y=0$ i $f4z=0$:

```
>>f=[12;0;0]
```

Powstanie w ten sposób układ równań:

$$10^4 \begin{bmatrix} 1.8159 & 3.0264 & 0.0000 \\ 3.0264 & 8.8532 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.4378 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u4x \\ u4y \\ u4z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

który rozwiążemy poleceniem:

```
>>u=k\f
```

wyznaczając nieznane przemieszczenia: $u4x = 0.0015\text{m}$, $u4y = -0.0005\text{m}$, $u4z = 0.0000\text{m}$.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy do wyników zerowe przemieszczenia podpór):

```
>>U=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;u]
```

a potem wyliczymy komplet sił w układzie:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy:

$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 8 \\ -12 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ -8 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Siły w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `SilyElementPretowy3D(E,A,L,Thx,Thy,Thz,u)`, której parametrami są: moduł sprężystości E, pole przekroju A, długości L1, L2 i L3, kąty nachylenia Thx1, Thy1, Thz1, ..., Th3z oraz przemieszczenia węzłów definiujących dany element (czyli dwie trójki liczb dla każdego elementu, np. dla pierwszego elementu: $u1x$, $u1y$ i $u1z$ oraz $u4x$, $u4y$, $u4z$):

najpierw przygotowujemy po dwie trójki przemieszczeń dla każdego elementu:

```
>>u1=[U(1:3); U(10:12)]
>>u2=[U(4:6); U(10:12)]
>>u3=[U(7:9); U(10:12)]
```

a potem wyznaczymy siły:

```
>>f1=SilyElementPretowy3D(E,A1,L1,Thx1,Thy1,Thz1,u1)
>>f2=SilyElementPretowy3D(E,A2,L2,Thx2,Thy2,Thz2,u2)
>>f3=SilyElementPretowy3D(E,A3,L3,Thx3,Thy3,Thz3,u3)
```

Wyniki wskazują, że elementy nr 1 i 3 są ściskane siłami -12.8062kN, a element nr 2 rozciągany siłą 23.3238kN. Naprężenia w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `NaprezeniaElementPretowy3D(E,L,Thx,Thy,Thz,u)`, której parametrami są: moduł sprężystości E, długości L1, L2 i L3, kąty nachylenia Thx1, Thy1, ..., Thz3 oraz przemieszczenia węzłów definiujących dany element:

```
>>s1=NaprezeniaElementPretowy3D(E,L1,Thx1,Thy1,Thz1,u1)
>>s2=NaprezeniaElementPretowy3D(E,L2,Thx2,Thy2,Thz2,u2)
>>s3=NaprezeniaElementPretowy3D(E,L3,Thx3,Thy3,Thz3,u3)
```

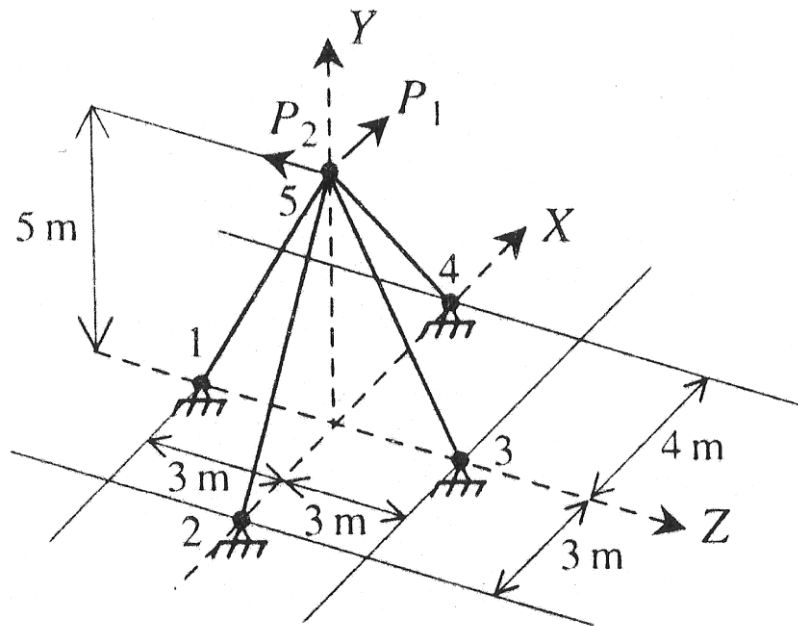
Uzyskane naprężenia dla elementów nr 1 i 3 wynoszą: -12.806MPa a dla elementu nr 2: 11.662MPa.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie nr 1.

Dla układu przedstawionego na rysunku poniżej, mając dane: $E=200\text{GPa}$, $A=0.003\text{m}^2$, $P_1=15\text{kN}$, $P_2=20\text{kN}$, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzła nr 5
3. reakcje w węzłach nr 1-4
4. siły i naprężenia w każdym elemencie



Zadanie nr 2.

Dla układu przedstawionego na rysunku poniżej, mając dane: $E=200\text{GPa}$, $A=0.003\text{m}^2$, $P=10\text{kN}$, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzłów swobodnych
3. reakcje w węzłach podporowych
4. siły i naprężenia w każdym elemencie

