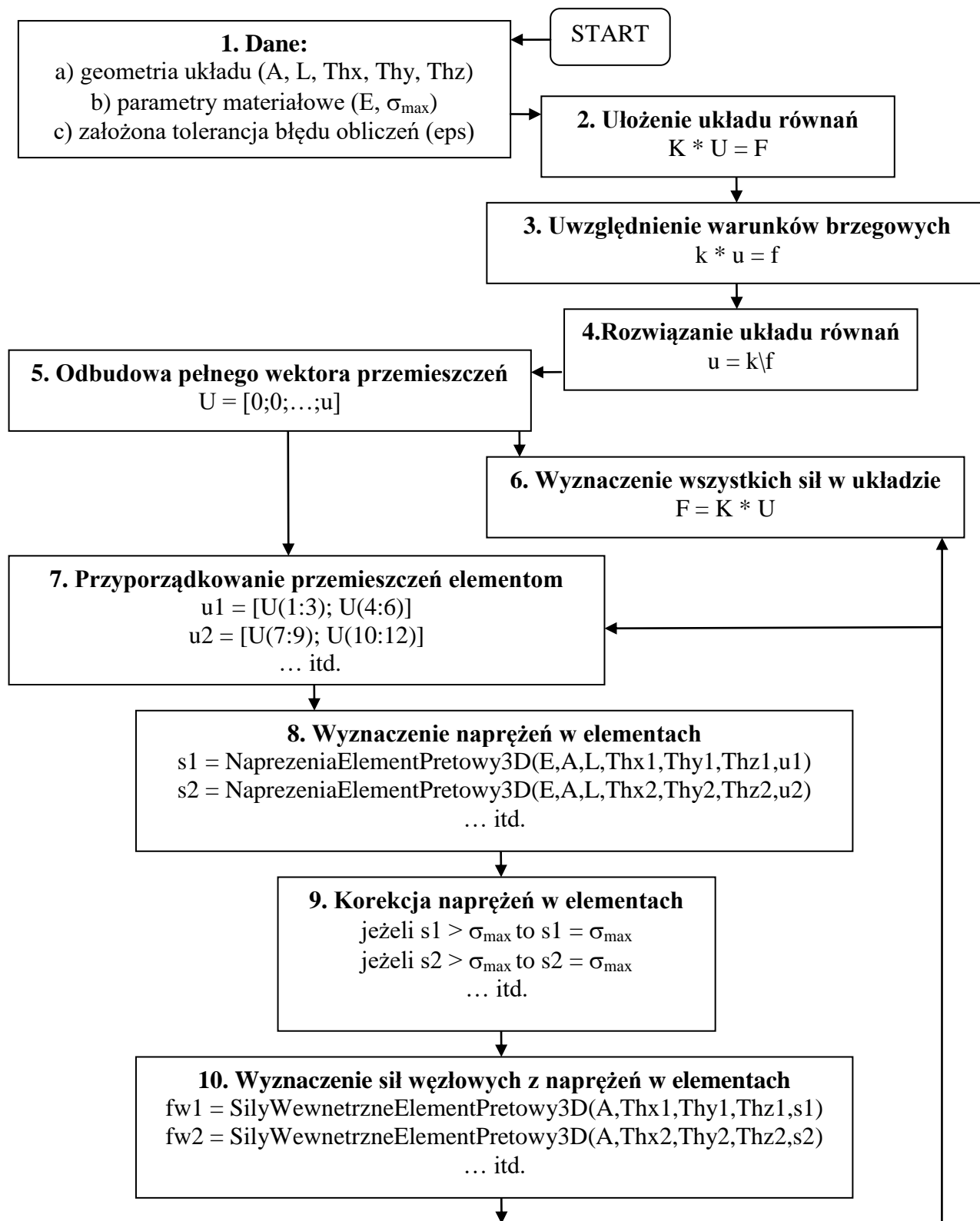


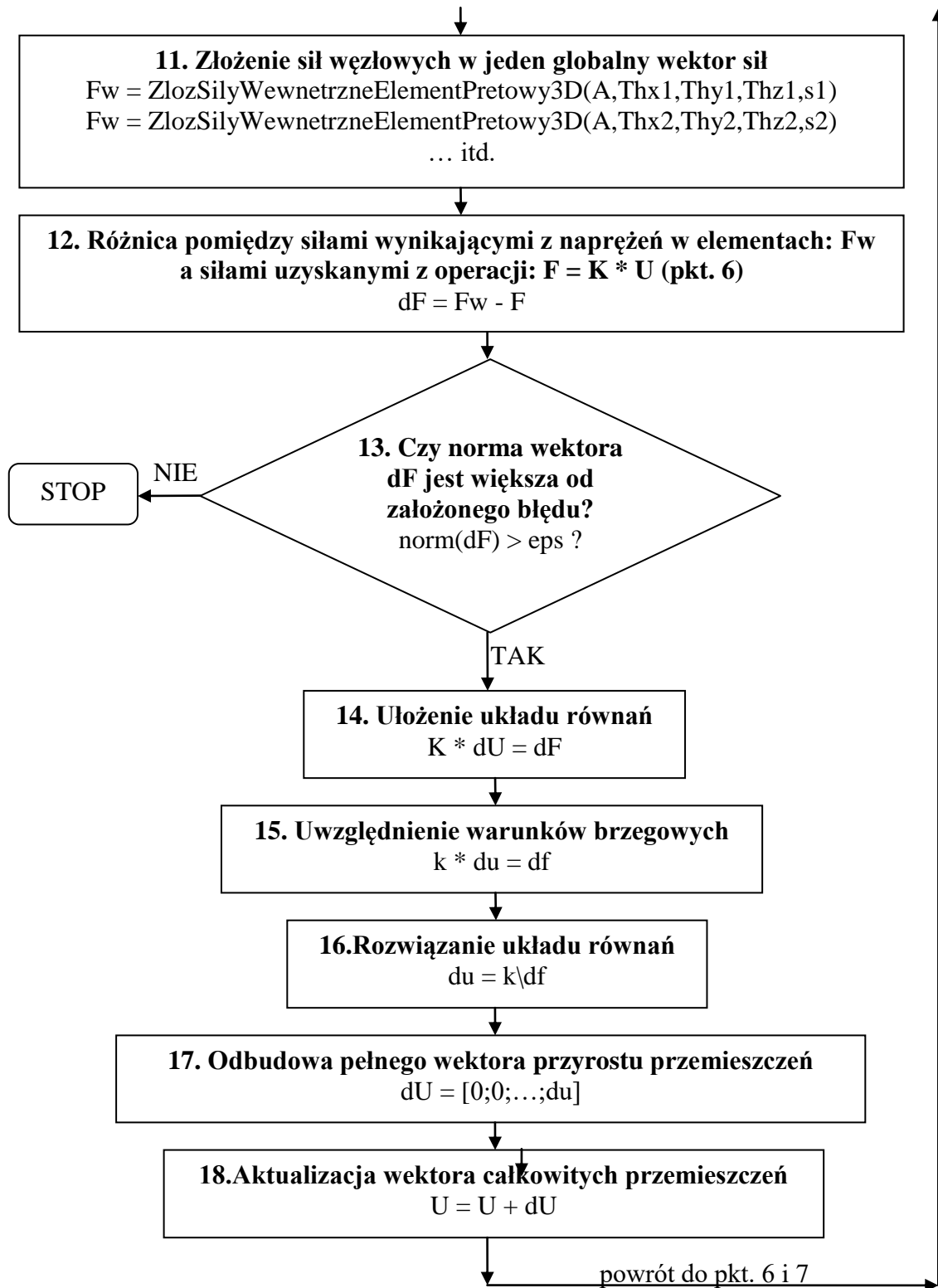
Metody Komputerowe

Metoda Elementów Skończonych

Element trójwymiarowy liniowy : pręt 3D – modelowanie ograniczonej wytrzymałości materiału

Najprostsze modelowanie ograniczonej wytrzymałości materiałów na przykładzie elementu Pręt3D sprowadza się do zastosowania procedury iteracyjnej korekcji wartości naprężenia wygenerowanego w elementach obciążeniem zewnętrznym. Idea polega na ograniczaniu wartości naprężenia rozciągającego elementy do wartości wytrzymałości σ_{\max} , zdefiniowanej dla danego materiału. Procedura ma następujący schemat:





Do zestawu funkcji Matlaba dochodzą jeszcze dwie funkcje realizujące obliczenia MES na elementach prętowych 3D:

poniższa funkcja zapisana jest w pliku: SilyWewnetrzneElementPretowy3D.m

```

function f = SilyWewnetrzneElementPretowy3D(A,Thx,Thy,Thz,s)
%funkcja wylicza sily wezlowe na podstawie znanego naprezenia s
%i geometrii preta
cx = cos(Thx.*pi./180);
cy = cos(Thy.*pi./180);
cz = cos(Thz.*pi./180);

```



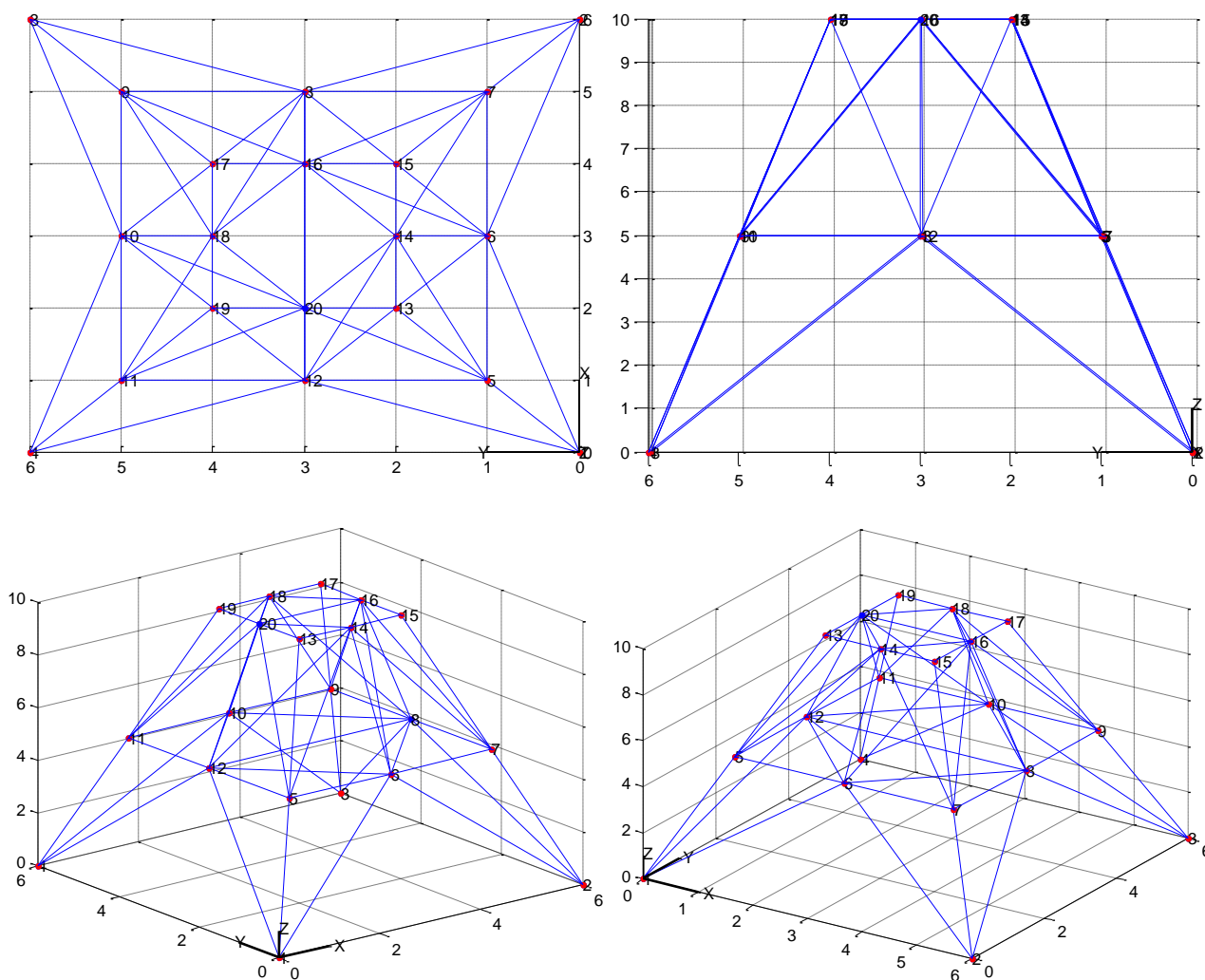
```
f = A .* s .* [-cx; -cy; -cz; cx; cy; cz];
```

poniższa funkcja zapisana jest w pliku: ZlozSilyWewnetrzneElementPretowy3D.m

```
function Fw = ZlozSilyWewnetrzneElementPretowy3D(Fw,f,w1,w2)
%funkcja sklada sily wezlowe z elementu w wektor sil globalnych
for idof=1:3
    dof = w1.*3 - 3 + idof;
    Fw(dof) = Fw(dof) + f(idof);
    dof = w2.*3 - 3 + idof;
    Fw(dof) = Fw(dof) + f(idof+3);
end
```

Przykład nr 1.

Dla podanego układu elementów (rysunek) wykonanych z materiału o znanym module $E = 210\text{GPa}$ i polu przekroju $A = 19.2\text{cm}^2$ (kątowniki 100x100x10) oraz granicy plastyczności $S_{\max} = 235\text{MPa}$ (stal S235JRG2), obciążonego siłą $P_x = 2000\text{kN}$ w węźle 20 i z podporami w węzłach od 1 do 4, wyznaczyć przemieszczenia węzłów i naprężenia w elementach.



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania

Wszystkie polecenia przepisujemy do skryptu Matlab, nadając mu nazwę „zadanie.m”. Skrypt powinien rozpoczynać się komendami czyszczącymi pamięć i okno komend:

```
clear;  
clc;
```

po których wprowadzamy stałe materiałowe i geometryczne:

```
E = 210e6;  
Smax = 235e3;  
A = 19.2e-4;
```

Następnie wprowadzamy współrzędne węzłów (x,y,z):

```
x = [0 6 6 0 1 3 5 5 5 3 1 1 2 3 4 4 4 3 2 2];  
y = [0 0 6 6 1 1 1 3 5 5 5 3 2 2 2 3 4 4 4 3];  
z = [0 0 0 0 5 5 5 5 5 5 5 5 10 10 10 10 10 10 10];
```

Zadanie jest podzielone na elementy następującą komendą:

```
elementy = [1 5; 1 6; 5 6; 6 7; 2 6; 2 7; 7 8; 8 9; 2 8; 3 8; 3 9; 9 10; 10 11; 3  
10; 4 10; 4 11; 11 12; 4 12; 1 12; 5 12; 6 12; 6 8; 8 10; 10 12; 5 13; 5 14; 13  
14; 14 15; 7 14; 7 15; 7 16; 15 16; 16 17; 9 16; 9 17; 9 18; 17 18; 18 19; 11  
18; 11 19; 11 20; 19 20; 13 20; 5 20; 14 16; 16 18; 18 20; 14 20; 6 14; 8 16; 10  
18; 12 20; 8 12; 16 20; 6 16; 8 18; 10 20; 12 14];
```

UWAGA! Powyższa komenda musi zostać wpisana w jednej linii skryptu! `elementy` to macierz, w której kolejne wiersze oznaczają kolejne elementy, a w każdym wierszu są numery dwóch węzłów definiujących dany element.

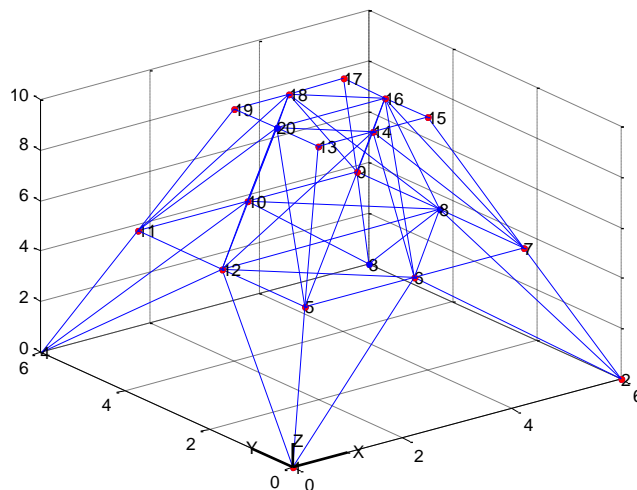
Wyznaczamy liczbę elementów, liczbę węzłów i liczbę stopni swobody w całym układzie:

```
ne = max(size(elementy));  
nw = max(size(x));  
ndof = nw .* 3;
```

Poprawność wygenerowanej struktury można sprawdzić rysując układ elementów i węzłów:

```
plot3(x,y,z, '. ')  
hold on;  
for k=1:nw  
    info = sprintf('%d',k);  
    text(x(k),y(k),z(k),info);  
end  
showmesh3D(elementy,x,y,z,'r','b');  
pause  
close(gcf);
```

powinien pojawić się rysunek:



który zamkniemy naciskając dowolny klawisz.

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu i

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

W celu oszczędności miejsca w pamięci, generację danych geometrycznych elementów (długości L i kąty Thx , Thy , Thz), generację macierzy elementowych (k) i proces składania macierzy globalnej (K) przeprowadzimy w jednej pętli obliczeniowej:

```
K = zeros(ndof,ndof);

for el=1:ne
    w1 = elementy(el,1);
    w2 = elementy(el,2);
    %Ponizsze polecenie należy skopiowac W JEDNEJ LINII!
    [L(el),Thx(el),Thy(el),Thz(el)] = DlugoscKatElementPretowy3D(x(w1),y(w1),
    z(w1), x(w2), y(w2), z(w2));
    k = SztynoscElementPretowy3D(E,A,L(el),Thx(el),Thy(el),Thz(el));
    K = ZlozSztynoscPretow3D(K,k,w1,w2);
end
```

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych i

Krok 5 – rozwiązanie równań

Ponieważ podpory znajdują się w pierwszych czterech węzłach, to znamy przemieszczenia pierwszych $4 \times 3 = 12$ stopni swobody (zero!). Zatem, wycinając te 12 pierwszych wierszy i kolumn z macierzy K , kopiujemy resztę do macierzy k (tzn. wiersze i kolumny od 13 do ndof):

```
k = K(13:ndof,13:ndof);
```

Analogicznie do K , przygotujemy pusty wektor obciążeń F :

```
F = zeros(ndof,1);
```

który uzupełnimy wartością siły 2000 kN działającą w kierunku x w 20 węzle, czyli w stopniu swobody nr $20 \times 3 - 2 = 58$:

```
F(58) = 2000;
```

Analogicznie do K , wycinamy z wektora obciążeń F tylko te wiersze, które odpowiadają wyciętym wierszom i kolumnom macierzy k :

```
f = F(13:ndof);
```


Stworzony układ równań rozwiążemy poleceniem:

```
U = k\f
```

wyznaczając wszystkie nieznane przemieszczenia.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy do wyników zerowe przemieszczenia podpór):

```
U = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;u];
```

a potem wyliczmy komplet sił w układzie:

```
F = K*U;
```

Naprężenia w każdym elemencie wyznaczymy z kompletu przemieszczeń węzłów definiujących dany element (w jednej pętli obliczeniowej):

```
for el=1:ne
    %numery wezlow elementu o numerze el
    w1 = elementy(el,1);
    w2 = elementy(el,2);
    %numery stopni swobody
    dof1 = [w1.*3-2 w1.*3-1 w1.*3];
    dof2 = [w2.*3-2 w2.*3-1 w2.*3];
    %zebrane z U przemieszczenia elementu o numerze el
    u = [U(dof1);U(dof2)];
    %naprezenie w elemencie o numerze el
    s(el) = NaprezeniaElementPretowy3D(E,L(el),Thx(el),Thy(el),Thz(el),u);
end
```

Sprawdzimy teraz, ile elementów ma przekroczone naprężenia dopuszczalne Smax:

```
max(size(find(s>Smax)))
```

i odczytamy wartość maksymalnego naprężenia w układzie:

```
max(s)
```

Maksymalna wartość naprężenia wynosi ok. 4.76e5 kPa, tzn. 476 MPa. Uzyskane naprężenia dla 10 elementów przekraczają dopuszczalną wartość Smax = 235MPa – należy przeprowadzić korekcję naprężeń: wszystkie wartości przekroczonych naprężeń zostaną zmniejszone do wartości Smax:

```
for ie=1:ne
    if s(ie) > Smax
        s(ie) = Smax;
    end
end
```

Po korekcie stanu naprężenia należy wyznaczyć nowe wartości sił w prętach (wynikające z nowych naprężeń) oraz złożyć je w nowy wektor sił globalnych działających w całym układzie - wykonamy to w jednej pętli obliczeniowej dla wszystkich elementów, zerując uprzednio nowy wektor sił:

```
Fw = zeros(ndof,1);
for ie=1:ne
```



```

w1 = elementy(ie,1);
w2 = elementy(ie,2);
f = SilyWewnetrzneElementPretowy3D(A,Thx(ie),Thy(ie),Thz(ie),s(ie));
Fw = ZlozSilyWewnetrzneElementPretowy3D(Fw,f,w1,w2);
end

```

Następnie policzymy różnicę dF pomiędzy nowym wektorem F_w a dotychczasowym wektorem sił F obowiązującym dla naprężeń przed korekcją:

```
dF = Fw - F;
```

i wytniemy z tej różnicy tylko ten fragment, który nie zawiera podpór (od 13 wiersza):

```
df = dF(13:ndof);
```

Możemy teraz wyznaczyć poprawkę przemieszczeń du w układzie, stosując jako obciążenie różnicę dF :

```
du = k\df;
```

następnie uzupełnimy wyznaczoną poprawkę przemieszczeń o znane przemieszczenia w podporach:

```
dU = [0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; du];
```

Wyznaczoną pełną poprawkę przemieszczeń dU dodajemy do uprzednio wyznaczonego wektora przemieszczeń wszystkich węzłów układu U (uaktualniamy U):

```
U = U + dU;
```

i możemy z nowego U wyznaczyć nowe siły F w układzie:

```
F = K * U;
```

oraz naprężenia we wszystkich elementach:

```

for el=1:ne
    w1 = elementy(el,1);
    w2 = elementy(el,2);
    dof1 = [w1.*3-2 w1.*3-1 w1.*3];
    dof2 = [w2.*3-2 w2.*3-1 w2.*3];
    u = [U(dof1);U(dof2)];
    s(el) = NaprezeniaElementPretowy3D(E,L(el),Thx(el),Thy(el),Thz(el),u);
end

```

Jeszcze raz sprawdzimy liczbę elementów, w których przekroczone są naprężenia maksymalne:

```
max(size(find(s>Smax)))
```

oraz sprawdzimy wartość maksymalnego naprężenia w układzie:

```
max(s)
```

Maksymalna wartość naprężenia wynosi aktualnie ok. $3.19e5$ kPa, tzn. 319 MPa (mniej niż przed korektą). Uzyskane w układzie naprężenia przekraczają dopuszczalną wartość $S_{max} = 235$ MPa dla 6 elementów (poprzednio było ich 10) – wciąż należy przeprowadzać korekcję obciążeń, wszystkie wartości przekroczonych naprężeń powinny być zmniejszone do wartości S_{max} . odkształcony układ możemy obejrzeć na wykresie stosując komendy:


```

showmesh3D(elementy,x,y,z,'g','g');
mnoznik = 10;
X = x + U(1:3:ndof)' .* mnoznik;
Y = y + U(2:3:ndof)' .* mnoznik;
Z = z + U(3:3:ndof)' .* mnoznik;
showmesh3D(elementy,X,Y,Z,'r','r');
pause
close(gcf);

```

UWAGA! Po naciśnięciu klawisza rysunek zostanie zamknięty.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie nr 1.

Kontynuować obliczenia z Przykładu nr 1 do momentu, w którym norma wektora poprawek sił dF :

```
disp(norm(dF))
```

nie będzie większa od 1.0. Ile należy wykonać korekt naprężeń? Ile po obliczeniach wynosi wartość siły będącej początkowym obciążeniem układu (P_x w węźle 20)?

Zadanie nr 2.

Jak można zautomatyzować proces korekcji wartości naprężeń w prętach w Zadaniu nr 1?

Zadanie nr 3.

Powtórzyć obliczenia z Zadania nr 1 ale zakładając, że materiał ma też ograniczoną wytrzymałość na ściskanie $S_{min} = -235\text{MPa}$. Ile należy wykonać korekt naprężeń? Ile po obliczeniach wynosi wartość siły będącej początkowym obciążeniem układu (P_x w węźle 20)?