

Metody komputerowe i obliczeniowe

Metoda Elementów Skończonych

Wyznaczanie macierzy sztywności dla elementu czterowzłowego Q4

Element czterowzłowy Q4 służy do realizacji obliczeń w szczególnych przypadkach trójwymiarowego stanu naprężenia i odkształcenia (płaski stan naprężenia, płaski stan odkształcenia). Na przykładzie tego elementu poznamy ogólną ideę zastosowania idei MES w mechanice.

1. Każdy układ rozpatrywany pod kątem równowagi statycznej musi spełniać równania:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

które w układzie płaskim można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0$$

Powyższy układ równań różniczkowych definiuje zależność pomiędzy oddziaływaniami zewnętrznymi i reakcjami wewnętrznymi w rozpatrywanym układzie.

2. Z praktycznego punktu widzenia interesują nas jeszcze odkształcenia i przemieszczenia, które wzajemnie są uzależnione równaniami (związki geometryczne):

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$$

tzn. w układzie płaskim:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

UWAGA! γ_{xy} należy do odkształceń w konwencji „inżynierskiej”, a ε_{12} należy do konwencji tensorowej.

3. Pozostaje jeszcze zdefiniować relację pomiędzy stanem naprężenia i odkształcenia (związki konstytutywne), którą przyjmujemy sobie w postaci liniowego prawa Hooke'a:

$$\sigma_{ij} = D \varepsilon_{ij}$$

z macierzą sprężystości D w płaskim stanie odkształcenia (PSO) w postaci:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

z macierzą sprężystości D w płaskim stanie naprężenia (PSN) w postaci:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Mamy zatem trzy układy zależności : $F(\sigma)$, $\varepsilon(u)$ i $\sigma(\varepsilon)$, z których wyprowadzimy równania Metody Elementów Skończonych w postaci $F(u)$.

Jeśli rozpiszemy:

- równania z pkt.1. w postać macierzową (przenosząc F na prawą stronę):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

w skrócie:

$$1^\circ. \quad [A]^T \{\sigma\} = -\{f\}$$

- równania z pkt. 2 w postać macierzową:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}$$

w skrócie:

$$2^\circ. \quad \{\varepsilon\} = [A]\{u\}$$

- równania z pkt.3 w postać macierzową :

dla PSO:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

dla PSN:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

w skrócie:

$$\mathbf{3^\circ. \quad \{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}}$$

to podstawiając w równaniu 1° za $\{\sigma\}$ równanie 3° otrzymamy:

$$[A]^T [D] \{\epsilon\} = -\{f\}$$

a podstawiając dalej za $\{\epsilon\}$ równanie 2° :

$$[A]^T [D] [A] \{u\} = -\{f\}$$

otrzymujemy szukaną zależność $F(u)$. Ponieważ wyeliminowaliśmy z równań zarówno macierz stanu naprężenia, jak i stanu odkształcenia pozostawiając jako niewiadome jedynie przemieszczenia, tak zdefiniowane zagadnienie nazywa się „sformułowaniem przemieszczeniowym” metody. Pełna postać naszego układu równań wygląda następująco (PSN):

$$\mathbf{4^\circ. \quad \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} \\ \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \end{Bmatrix}}$$

zatem jest to układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych o niewiadomych w postaci składowych stanu przemieszczenia, które musimy rozwiązać jakąś metodą numeryczną, np. metodą elementów skończonych (MES). Rozwiązywanie równań różniczkowych polega na ich całkowaniu, zatem musimy podzielić obszar, który opisany jest układem powyższych równań na części – elementy. Jeśli potraktujemy pojedynczy element jako bardzo mały wycinek całości, to będziemy mogli bez większej szkody dla dokładności rozwiązania zastąpić (aproksymować – przybliżyć) rzeczywisty przebieg przemieszczeń w danym elemencie przyjętą (znaną) funkcją, którą nazywa się **funkcją kształtu**, oznaczaną przez N . Ponieważ każdy element definiowany jest przez punkty

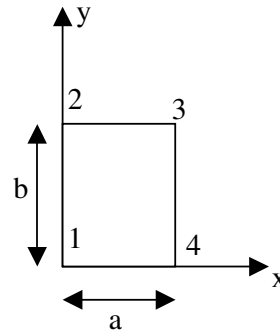
(naroża-węzły), to zakłada się, że interesujące nas przemieszczenia dotyczą tylko tych punktów, a zatem, funkcje kształtu danego elementu definiujemy tylko w węzłach (później okaże się, że nie tylko ☺). Np., dla elementu czterowęzłowego (czworobok) mamy cztery funkcje kształtu:

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N_2 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b}$$

$$N_3 = \frac{x}{a} \frac{y}{b}$$

$$N_4 = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$



Zadanie 1:

a) Proszę przyjąć jakieś wartości a i b , a następnie wyliczyć po cztery wartości N dla każdego z czterech węzłów.

b) Proszę narysować przebieg funkcji N_1 po krawędziach elementu. Jak będą wyglądać przebiegi pozostałych funkcji N ?

Zatem przyjęliśmy już, że znamy „kształt” przebiegu wartości składowych przemieszczenia w elemencie, bo założyliśmy postać funkcji kształtu, zatem niewiadomą $\{u\}$ można wyznaczyć w dowolnym miejscu elementu z relacji (znając przemieszczenie samych węzłów $\{u^w\}$):

$$u_x = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \\ u_{4x} \end{Bmatrix} = [N] \{u_x^w\}$$

$$u_y = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} u_{1y} \\ u_{2y} \\ u_{3y} \\ u_{4y} \end{Bmatrix} = [N] \{u_y^w\}$$

czyli:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \end{Bmatrix} = [N]\{u^w\}$$

Skoro znamy już przebieg wartości składowych przemieszczenia w elemencie wystarczy podstawić do naszego układu dwóch równań różniczkowych 4° zamiast $\{u\}$ (reprezentujący ciągły stan przemieszczeń w obszarze) - $[N]\{u^w\}$ (reprezentujący dyskretne przemieszczenia wyznaczone w obszarze na podstawie znanych funkcji kształtu oraz znanych wartości przemieszczeń w węzłach) oraz scałkować po obszarze elementu:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \iint_{0^a}^{b^b} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \\ \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \end{array} \right]_{i,j=1,2,3,4} dx dy \{u^w\} = \{f^w\}$$

gdzie $\{f^w\}$ – to siły w węzłach.

Powyższy układ równań można zapisać w postaci:

$$[k_m]\{u\}=\{f\}$$

zatem $[k_m]$:

$$[k_m] = \frac{E}{1-\nu^2} \iint_{0^a}^{b^b} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \\ \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) \end{array} \right]_{i,j=1,2,3,4} dx dy$$

gdzie $[k_m]$ jest macierzą sztywności elementu. Proszę zauważyć, że proste formy funkcji kształtu łatwo się różniczkują względem x i y , zatem wyznaczanie macierzy sztywności elementu czterowęzłowego jest rzeczą prostą, lecz pracochłonną. Dalsze postępowanie przebiega wg schematów z poprzednich zajęć. W praktyce jednak rzadko korzysta się z takiej formy macierzy sztywności.

Inna droga wyprowadzenia macierzy sztywności opiera się na tzw. **podjęściu energetycznym**. Zakłada się, że całkowita energia potencjalna P analizowanego układu jest wypadkową energii skumulowanej w odkształceniach U i pracy wykonanej przez obciążenia L :

$$P = U - L$$

Reguła minimalizująca energię potencjalną układu wymaga, aby wariacja (zmiana) δP była jak najmniejsza, najlepiej równa zero, tj.:

$$\delta P = \delta U - \delta L = 0$$

Energia odkształceń U zdefiniowana jest w postaci:

$$U = \iint \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dx dy = \iint \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dx dy$$

lub wariacyjnie:

$$\delta U = \iint \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dx dy = \iint \{\sigma\}^T \delta \{\epsilon\} dx dy$$

Jeśli podstawimy do wzoru na U za $\{\sigma\}$ równanie 3° to otrzymamy:

$$U = \iint \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dx dy$$

Teraz wykorzystamy nasze funkcje kształtu. Jeśli równanie 2° zapiszemy uwzględniając zamiast $\{u\}$ dyskretne wartości $[N]\{u^w\}$:

$$\{\epsilon\} = [A][N]\{u^w\}$$

i zauważymy, że składnikami macierzy $[A][N]$ oznaczanej przez $[B]$ są pochodne funkcji kształtu N po zmiennych x i y :

$$[B] = [A][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{41}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

(proszę sprawdzić!)

t.j.:

$$\{\epsilon\} = [B]\{u^w\}$$

a następnie podstawimy do wzoru na U za $\{\epsilon\}$ powyższą zależność to otrzymamy:

$$U = \iint \{u^w\}^T [B]^T [D] [B] \{u^w\} dx dy$$

lub wariacyjnie:

$$\delta U = \iint \delta \{u^w\}^T [B]^T [D] [B] \delta \{u^w\} dx dy$$

Natomiast praca obciążeń zewnętrznych L jest zdefiniowana następująco:

$$L = \iint \{u\}^T \{F\} dx dy$$

lub wariacyjnie

$$\delta L = \iint \delta \{u\}^T \{F\} dx dy$$

(proszę porównać z definicją energii (pracy) oddziaływań zewnętrznych z wykładu z TSIP dot. hipersprężystości!).

Wektor ciągłego stanu przemieszczenia $\{u\}$ we wzorze na δL też trzeba zamienić na formę dyskretną $[N]\{u^w\}$, zatem:

$$\delta L = \iint \delta \{u^w\}^T [N]^T \{F\} dx dy$$

Teraz wracamy do równania energii potencjalnej i podstawiamy zależności na δU i δL :

$$\delta P = \delta U - \delta L = \iint \delta \{u^w\}^T [B]^T [D] [B] \delta \{u^w\} dx dy - \iint \delta \{u^w\}^T [N]^T \{F\} dx dy = 0$$

wyłączając $\delta \{u^w\}^T$ otrzymujemy:

$$\delta P = \delta \{u^w\}^T \left(\iint [B]^T [D] [B] dx dy \delta \{u^w\} - \iint [N]^T \{F\} dx dy \right) = 0$$

Biorąc pod uwagę fakt, że rozpatrujemy jeden element, całkowita zmiana energii potencjalnej będzie sumą zmian we wszystkich elementach:

$$\sum_{i=1}^n \delta P = \sum_{i=1}^n \left(\delta \{u^w\}^T \left(\iint [B]^T [D] [B] dx dy \delta \{u^w\} - \iint [N]^T \{F\} dx dy \right) \right)_i = 0$$

zatem:

$$\sum_{i=1}^n \left(\iint [B]^T [D] [B] dx dy \delta \{u^w\} - \iint [N]^T \{F\} dx dy \right)_i = 0$$

lub:

$$\sum_{i=1}^n \left(\iint [B]^T [D] [B] dx dy \delta \{u^w\} \right)_i = \sum_{i=1}^n \left(\iint [N]^T \{F\} dx dy \right)_i$$

Powyższy układ równań można zapisać w postaci uproszczonej:

$$\sum_{i=1}^n [k_m]_i \{u^w\}_i = \sum_{i=1}^n [f]_i$$

czyli nasz znany układ:

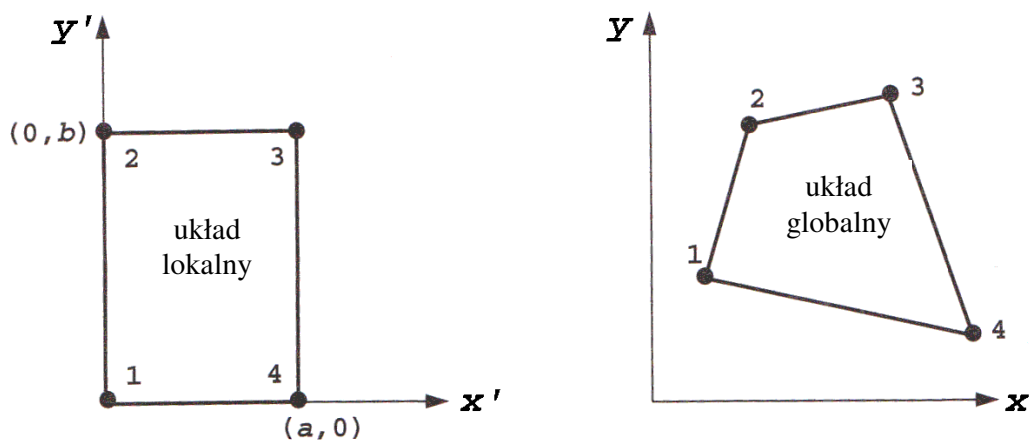
$$[k_m]\{u\}=\{f\}$$

zsumowany ze wszystkich elementów.

Oczywiście znów macierz sztywności elementu:

$$[k_m] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy$$

nie jest łatwo wyznaczyć, ze względu na całkowanie pochodnych funkcji kształtu (tak jak poprzednio). I tu pojawia się koncepcja lokalnego i globalnego układu współrzędnych. Do tej pory wszystko analizowaliśmy w jednym globalnym układzie współrzędnych X-Y, tymczasem można by rozpatrywać każdy element niezależnie w układzie lokalnym, takim, aby podwójna całka po powierzchni elementu miała granice powiedzmy od 0 do 1, albo od -1 do 1, tylko trzeba by zadbać jeszcze o przeniesienie wyników z lokalnego układu do globalnego. Okazuje się, że funkcje transformujące układy lokalny i globalny mogą mieć taką samą postać, co funkcje kształtu, a to znakomicie upraszcza zagadnienie (element, który ma takie same funkcje kształtu i transformacyjne nazywa się elementem izoparametrycznym). Prześledźmy to na przykładzie naszego elementu czterowęzłowego.



Na powyższym rysunku przedstawiono ideę układu lokalnego i globalnego. Każdy element w MES można z rzeczywistego kształtu przetransformować na kształt regularny, np. z dowolnego czworokąta na prostokąt, z dowolnego trójkąta na trójkąt prostokątny itd. Jeszcze lepsza byłaby transformacja z dowolnego czworokąta na kwadrat, i taką transformację przedstawia rysunek poniżej. Czworokąt w układzie osi ξ i η staje się kwadratem o środku (przecięcie przekątnych) w punkcie P. Punkt P w układzie osi ξ i η ma współrzędne (0,0), natomiast wierzchołki-węzły odpowiednio: 1(-1,-1), 2(-1,1), 3(1,1) i 4(1,-1).

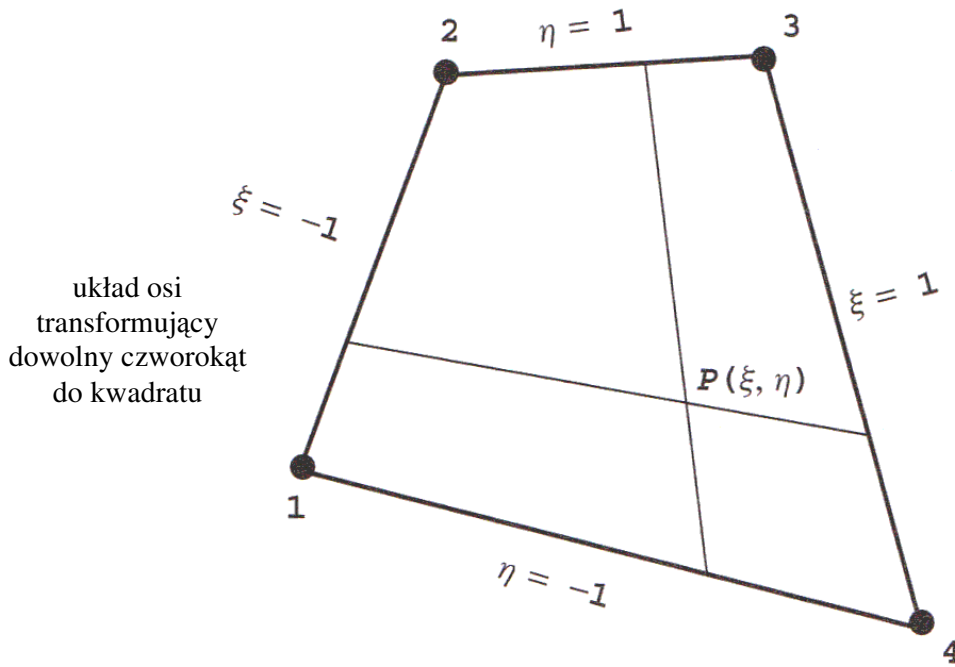
Funkcje kształtu mają następującą postać:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$



Przypomnę, że funkcje te służą do wyliczenia przemieszczeń w dowolnym punkcie obszaru elementu, jeśli znane są wartości w wierzchołkach (interpolacja wartości).

Zadanie 2

- Proszę wyliczyć po cztery wartości N dla każdego z czterech węzłów.
- Proszę narysować przebieg funkcji N_1 po krawędziach elementu. Jak będą wyglądać przebiegi pozostałych funkcji N ?

Dla elementów izoparametrycznych funkcje te są jednocześnie funkcjami transformującymi wartości współrzędnych z układu lokalnego do globalnego:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = [N]\{x\}$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = [N]\{y\}$$

gdzie x_i, y_i – współrzędne węzłów w układzie globalnym

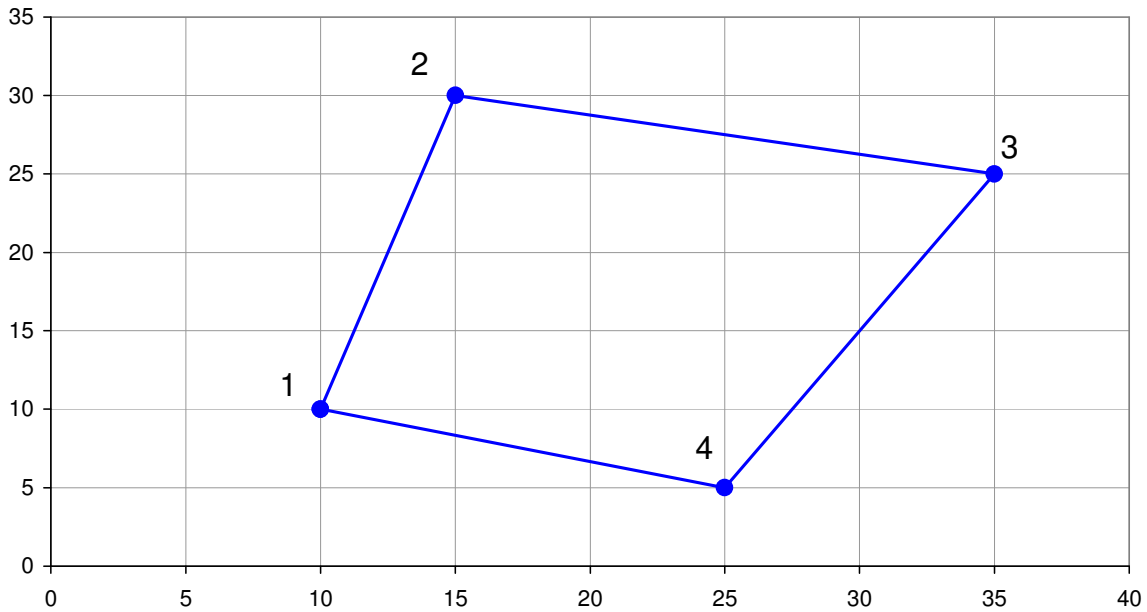
UWAGA! Za ξ i η w definicjach N_i podstawiamy współrzędne danego miejsca w układzie lokalnym, a wyliczamy x i y tego samego miejsca tyle, że w układzie globalnym.

Zadanie 3

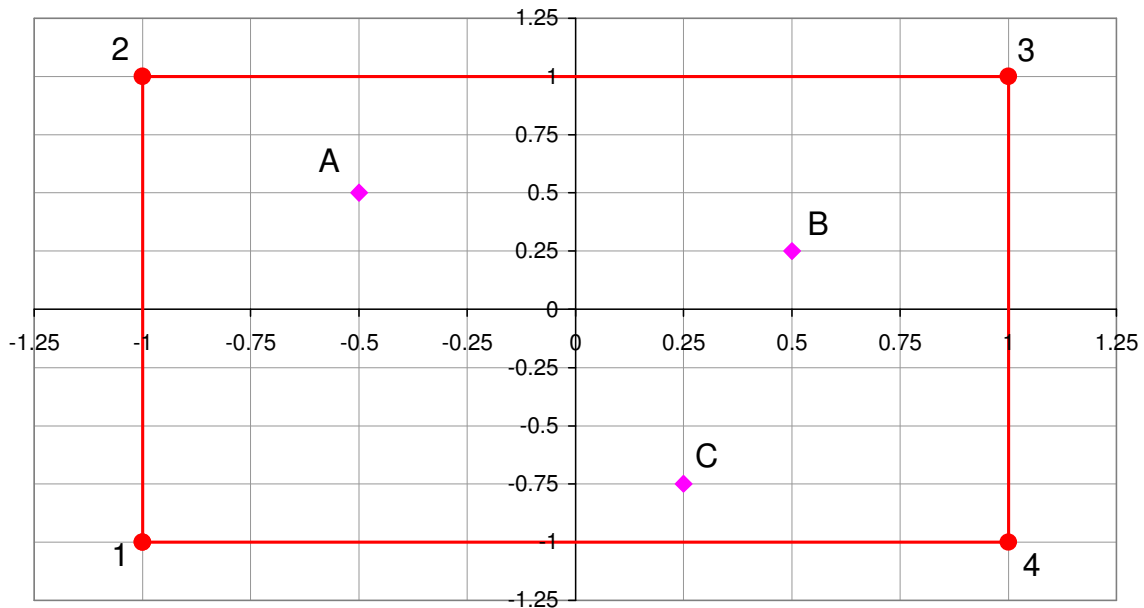
- Dla danego niżej czworokąta wyznaczyć współrzędne punktu A , B i C w układzie globalnym, znając ich współrzędne w układzie lokalnym (odczytać z wykresu).

b) Zaznaczyć położenie punktów *A*, *B* i *C* w układzie globalnym.

Układ globalny



Układ lokalny



Przejście z układu globalnego z powrotem do lokalnego nie jest potrzebne. Wszystkie potrzebne całki policzymy w układzie lokalnym i przeniesiemy wyniki do układu globalnego. Wracać nie ma po co. Przypomnijmy, że chcemy scałkować pochodne funkcji kształtu **po zmiennych globalnych**

x i y , jak zatem posłużyć się układem lokalnym? Otóż stosujemy dobrze znaną regułę różniczkowania (reguła łańcuchowa):

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

lub

$$\frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi}$$

Ponieważ funkcje kształtu N zależą od zmiennych lokalnych ξ i η , to łatwo je zróżniczkować względem tych zmiennych.

Zadanie 4

Policzyć pochodne funkcji kształtu po zmiennych lokalnych:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \end{array}$$

Regułę łańcuchową możemy zapisać macierzowo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

macierz pochodnych współrzędnych układu globalnego po współrzędnych układu lokalnego nosi nazwę macierzy Jacobiego. Proszę zauważyć, że powyższa relacja dotyczy przejścia z układu **globalnego do lokalnego** (wynik działań po lewej stronie to pochodne w układzie lokalnym). Nas jednak bardziej interesuje wyjście z układu lokalnego (czyli wynik w układzie globalnym), toteż odwracamy relację i otrzymujemy:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

zatem jedyną rzeczą, jaką musimy policzyć, to elementy odwróconej macierzy Jacobiego. Co jest łatwiej policzyć: pochodne współrzędnych układu lokalnego po globalnych, czy globalnego po lokalnych? Jeśli przyjrzymy się równaniom transformacji:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = [N] \{x\}$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = [N] \{y\}$$

które po podstawieniu definicji N_i :

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

wyglądają następująco:

$$x = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) x_1 + \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) x_2 + \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) x_3 + \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) x_4$$

$$y = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) y_1 + \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) y_2 + \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) y_3 + \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) y_4$$

(oczywiście x_i i y_i to stałe i znane wartości współrzędnych węzłów elementu w układzie globalnym)

to zauważymy, że łatwiej jest wyznaczyć **pochodne współrzędnych globalnych po lokalnych**, czyli elementy macierzy Jacobiego. Zatem:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) x_1 + \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) x_2 + \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) x_3 + \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) x_4 = \\ &= \frac{1}{4} (1 - \eta - \xi + \xi\eta) x_1 + \frac{1}{4} (1 + \eta - \xi - \xi\eta) x_2 + \frac{1}{4} (1 + \eta + \xi + \xi\eta) x_3 + \frac{1}{4} (1 - \eta + \xi - \xi\eta) x_4 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (0 - 0 - 1 + \eta) x_1 + \frac{1}{4} (0 + 0 - 1 - \eta) x_2 + \frac{1}{4} (0 + 0 + 1 + \eta) x_3 + \frac{1}{4} (0 - 0 + 1 - \eta) x_4 =$$

$$= \frac{1}{4} (-1 + \eta) x_1 + \frac{1}{4} (-1 - \eta) x_2 + \frac{1}{4} (1 + \eta) x_3 + \frac{1}{4} (1 - \eta) x_4$$

Zadanie 5

Policzyć pozostałe trzy elementy macierzy Jacobiego (można wykorzystać wcześniejsze pochodne funkcji kształtu).

Odwrócenie macierzy Jacobiego jest prostą czynnością, ze względu na fakt, iż jest to zawsze macierz 2x2 dla zadań PSO i PSN:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

$\det[J]$ to oczywiście wyznacznik z macierzy Jacobiego, który nazywa się jakobianem:

$$\det[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

Zatem możemy już teraz policzyć pochodne funkcji kształtu po zmiennych globalnych:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Ponieważ pochodne funkcji kształtu N po zmiennych lokalnych mamy już wyznaczone (Zadanie 4), wystarczy przemnożyć je macierzowo (dla każdej funkcji $N_1 \div N_4$ niezależnie) przez odwróconą macierz Jacobiego i mamy elementy, z których możemy ułożyć macierz $[B]$.

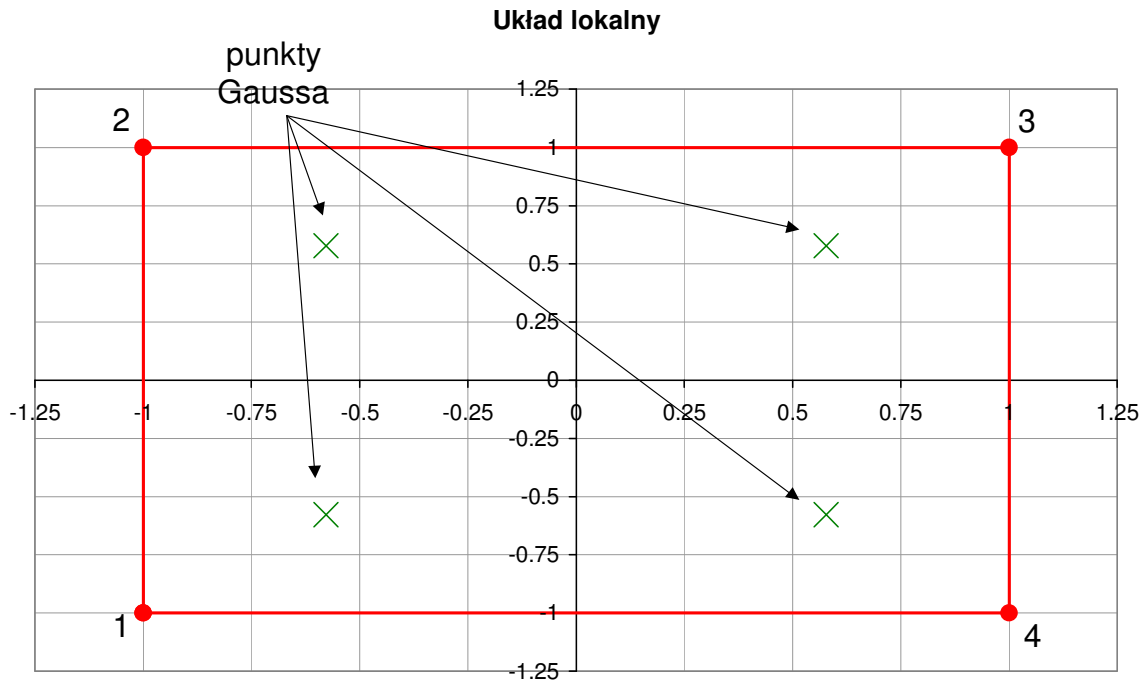
Wracamy do naszego całkowania, aby wyznaczyć wreszcie macierz sztywności.

$$[k_m] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy$$

Wiemy już, że w układzie lokalnym łatwiej się pracuje (element jest kwadratem, węzły mają współrzędne $x=\pm 1$ i $y=\pm 1$) i łatwiej powinno się też całkować, bo granice to -1 do $+1$. Mimo to, całkowanie wciąż jeszcze jest pracochłonne. I tu pojawia się koncepcja kwadratury Gaussa-Legendre'a, która przejawia się w MES tzw. punktami całkowania Gaussa – specjalnymi punktami w obszarze elementu, których współrzędne umożliwiają szybkie całkowanie wg bardzo prostej reguły:

$$\iint [B]^T [D] [B] dx dy \approx \sum_{i=1}^g w_i \det[J]_i ([B]^T [D] [B])_i$$

tzn. wystarczy dla danego elementu zsumować iloczyny : waga * jakobian * $B^T * D * B$ dla każdego punktu Gaussa i mamy całkę policzoną (sekret prostoty tkwi właśnie w tych specjalnych współrzędnych i w wadze tych szczególnych punktów). W przypadku naszego czworokąta mamy do dyspozycji 1, 4 lub 9 punktów Gaussa – wybierzemy sobie najczęściej stosowany układ z czterema punktami.



Na powyższym rysunku zaznaczono położenie punktów Gaussa. Mają współrzędne $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}};\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ i wagi równe 1 (wszystkie). Wiemy już wszystko, co jest potrzebne do wyznaczenia macierzy sztywności elementu. Zatem zbierzmy to w całość:

1. Musimy znać parametry materiałowe: E , ν (liniowa sprężystość Hooke'a), żeby wyznaczyć macierz $[D]$; dla PSO:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

2. Musimy znać współrzędne czterech węzłów naszego elementu w układzie globalnym $(x_i; y_i)$;
3. Obliczamy pochodne $\frac{\partial N_1}{\partial \xi}, \frac{\partial N_1}{\partial \eta}, \frac{\partial N_2}{\partial \xi}, \frac{\partial N_2}{\partial \eta}, \frac{\partial N_3}{\partial \xi}, \frac{\partial N_3}{\partial \eta}, \frac{\partial N_4}{\partial \xi}, \frac{\partial N_4}{\partial \eta}$ podstawiając za ξ i η

współrzędne punktów Gaussa w układzie lokalnym, czyli $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}};\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$; wszystkie pochodne musimy wyznaczyć dla każdego punktu Gaussa niezależnie (oczywiście mamy już policzone wzory na te pochodne, wystarczy podstawić do nich liczby);

4. Obliczamy wartości pochodnych $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$ wg wzorów z zadania 5, podstawiając za x

i y współrzędne węzłów w układzie globalnym, a za ξ i η współrzędne punktów Gaussa w układzie lokalnym (po 4 pochodne dla każdego punktu Gaussa);

5. Obliczamy jacobian;
6. Obliczamy elementy odwróconej macierzy Jacobiego dla każdego punktu Gaussa (znów po 4 elementy dla każdego punktu Gaussa);

7. mnożymy macierzowo $[J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$ i otrzymujemy $\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix}$ dla każdej funkcji $N_1 \div N_4$

niezależnie i dla każdego punktu Gaussa też niezależnie;

8. Z elementów otrzymanych w punkcie 7, tj. $\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \frac{\partial N_4}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial y}$

budujemy macierz [B] dla każdego punktu Gaussa osobno:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

9. Dla każdego punktu Gaussa całkujemy sztywność wg formuły mnożenia macierzowego:

$$1 * \det[J] * [B]^T * [D] * [B]$$

(jedyńka na początku to waga punktu Gaussa)

10. Składamy macierz sztywności sumując składniki macierzy otrzymanych w pkt.9 dla każdego punktu Gaussa (sumowanie macierzowe);

11. Uff... i koniec.

A teraz chwila wytchnienia:

Zadanie 6

Wyznaczyć macierz sztywności elementu z zadania 3 dla $E=10\text{MPa}$ i $\nu=0.3$.