Metody komputerowe i obliczeniowe

Metoda Elementów Skończonych

Wyznaczanie macierzy sztywności dla elementu czterowęzłowego Q4

Rozwiązania zadań

Zadanie 1:

a) Proszę przyjąć jakieś wartości a i b, a następnie wyliczyć po cztery wartości N dla każdego z czterech węzłów.

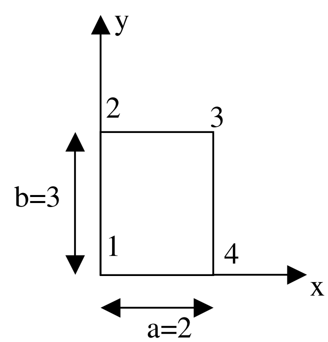
b) Proszę narysować przebieg funkcji N_1 po krawędziach elementu. Jak będą wyglądać przebiegi pozostałych funkcji N?

$$N_1 = \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$N_2 = \left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}$$

$$N_3 = \frac{x}{a}\frac{y}{b}$$

$$N_4 = \frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$



Rozwiązanie a): dla a = 2 i b = 3 mamy:

Węzeł nr 1 ma współrzędne x = 0 i y = 0

$$N_1 = \left(1-\frac{0}{2}\right)\left(1-\frac{0}{3}\right) = 1; \quad N_2 = \left(1-\frac{0}{2}\right)\frac{0}{3} = 0; \quad N_3 = \frac{0}{2}\frac{0}{3} = 0; \quad N_4 = \frac{0}{2}\left(1-\frac{0}{3}\right) = 0;$$

Węzeł nr 2 ma współrzędne x = 0 i y = 3

$$N_1 = \left(1-\frac{0}{2}\right)\left(1-\frac{3}{3}\right) = 0; \quad N_2 = \left(1-\frac{0}{2}\right)\frac{3}{3} = 1; \quad N_3 = \frac{0}{2}\frac{3}{3} = 0; \quad N_4 = \frac{0}{2}\left(1-\frac{3}{3}\right) = 0;$$

Węzeł nr 3 ma współrzędne x = 2 i y = 3

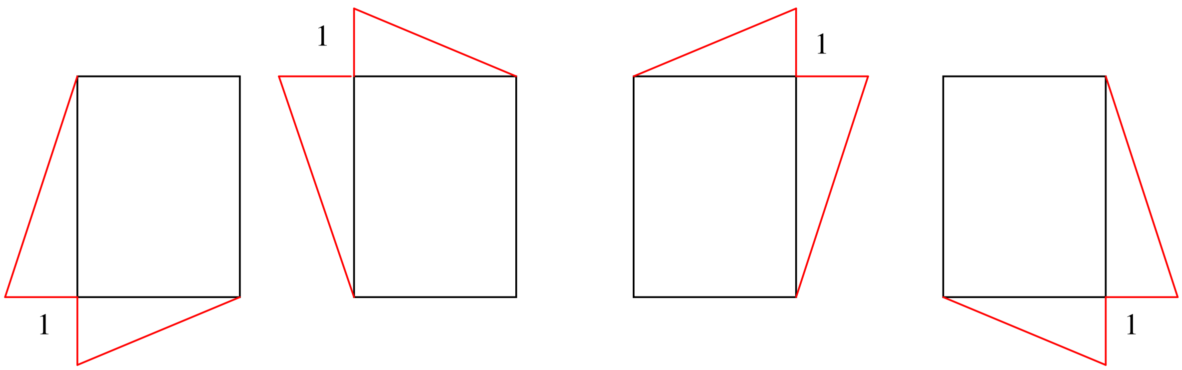
$$N_1 = \left(1-\frac{2}{2}\right)\left(1-\frac{3}{3}\right) = 0; \quad N_2 = \left(1-\frac{2}{2}\right)\frac{3}{3} = 0; \quad N_3 = \frac{2}{2}\frac{3}{3} = 1; \quad N_4 = \frac{2}{2}\left(1-\frac{3}{3}\right) = 0;$$

Węzeł nr 4 ma współrzędne x = 2 i y = 0

$$N_1 = \left(1-\frac{2}{2}\right)\left(1-\frac{0}{3}\right) = 0; \quad N_2 = \left(1-\frac{2}{2}\right)\frac{0}{3} = 0; \quad N_3 = \frac{2}{2}\frac{0}{3} = 0; \quad N_4 = \frac{2}{2}\left(1-\frac{0}{3}\right) = 1;$$

Rozwiązanie b):

Dla węzła nr 1 | Dla węzła nr 2 | Dla węzła nr 3 | Dla węzła nr 4



Zadanie 2

a) Proszę wyliczyć po cztery wartości N dla każdego z czterech węzłów.

b) Proszę narysować przebieg funkcji N_1 po krawędziach elementu. Jak będą wyglądać przebiegi pozostałych funkcji N?

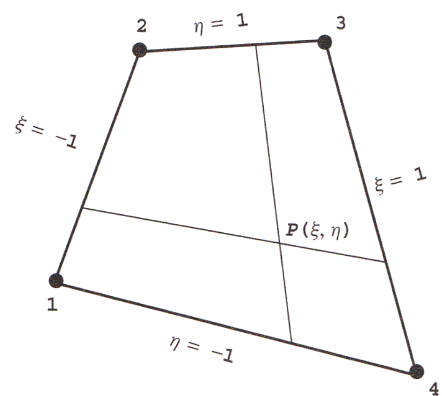
Funkcje kształtu mają następującą postać:

$$\mathbf{N_1 = \tfrac{1}{4}\,(1 - \xi)\,(1 - \eta)}$$

$$\mathbf{N_2 = \tfrac{1}{4}\,(1 - \xi)\,(1 + \eta)}$$

$$\mathbf{N_3 = \tfrac{1}{4}\,(1 + \xi)\,(1 + \eta)}$$

$$\mathbf{N_4 = \tfrac{1}{4}\,(1 + \xi)\,(1 - \eta)}$$



A element ma takie współrzędne lokalne wierzchołków (zawsze): 1(-1,-1), 2(-1,1), 3(1,1) i 4(1,-1).

Zatem, dla wierzchołka nr 1:

$N_1 = \frac{1}{4}\,(1 - -1)\,(1 - -1) = 1;$ $N_2 = \frac{1}{4}\,(1 - -1)\,(1 + -1) = 0;$

$N_3 = \frac{1}{4}\,(1 + -1)\,(1 + -1) = 0;$ $N_4 = \frac{1}{4}\,(1 + -1)\,(1 - -1) = 0;$

Zatem, dla wierzchołka nr 2:

$N_1 = \frac{1}{4}\,(1 - -1)\,(1 - 1) = 0;$ $N_2 = \frac{1}{4}\,(1 - -1)\,(1 + 1) = 1;$

$N_3 = \frac{1}{4}\,(1 + -1)\,(1 + 1) = 0;$ $N_4 = \frac{1}{4}\,(1 + -1)\,(1 - 1) = 0;$

Zatem, dla wierzchołka nr 3:

$N_1 = \frac{1}{4}\,(1 - 1)\,(1 - 1) = 0;$ $N_2 = \frac{1}{4}\,(1 - 1)\,(1 + 1) = 0;$

$N_3 = \frac{1}{4}\,(1 + 1)\,(1 + 1) = 1;$ $N_4 = \frac{1}{4}\,(1 + 1)\,(1 - 1) = 0;$

Zatem, dla wierzchołka nr 4:

$N_1 = \frac{1}{4}\,(1 - 1)\,(1 - -1) = 0;$ $N_2 = \frac{1}{4}\,(1 - 1)\,(1 + -1) = 0;$

$N_3 = \frac{1}{4}\,(1 + 1)\,(1 + -1) = 0;$ $N_4 = \frac{1}{4}\,(1 + 1)\,(1 - -1) = 1;$

Wykresy są takie same jak w zadaniu nr 1.

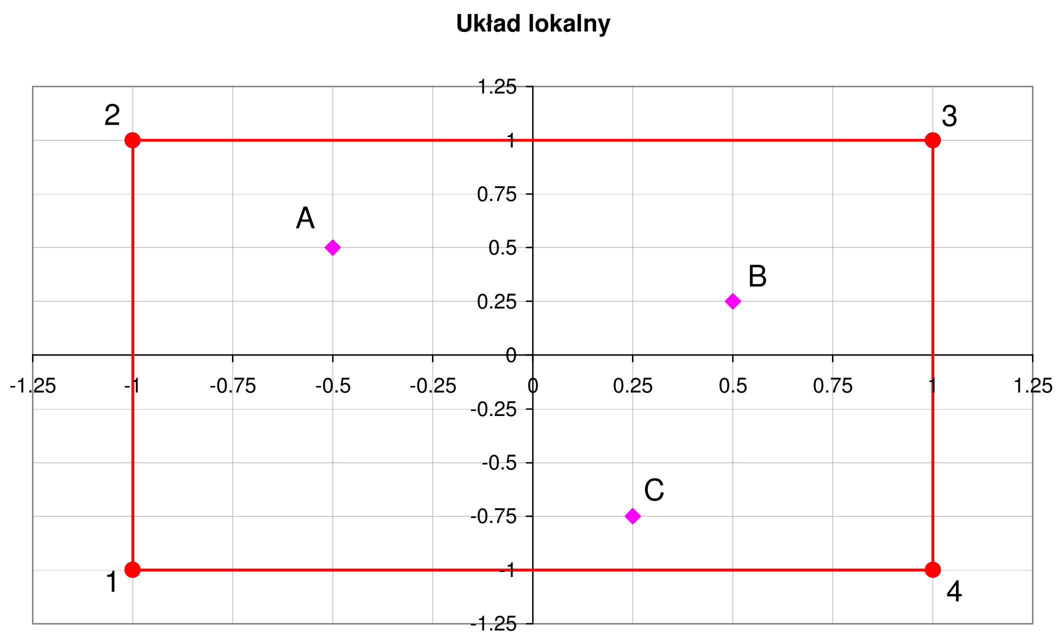
Zadanie 3

a) Dla danego niżej czworokąta wyznaczyć współrzędne punktu A, B i C w układzie globalnym, znając ich współrzędne w układzie lokalnym (odczytać z wykresu).

b) Zaznaczyć położenie punktów A, B i C w układzie globalnym.

Rozwiązanie a): współrzędne punktów w układzie lokalnym:

A: $\xi = -0.5$ i $\eta = 0.5$ B: $\xi = 0.5$ i $\eta = 0.25$ C: $\xi = 0.25$ i $\eta = -0.75$



Odpowiadające im wartości funkcji kształtu:

dla punktu A:

$$N_1 = \tfrac{1}{4}\,(1 - -0.5)\,(1 - 0.5) = 0.1875$$

$$N_2 = \tfrac{1}{4}\,(1 - -0.5)\,(1 + 0.5) = 0.5625$$

$$N_3 = \tfrac{1}{4}\,(1 + -0.5)\,(1 + 0.5) = 0.1875$$

$$N_4 = \tfrac{1}{4}\,(1 + -0.5)\,(1 - 0.5) = 0.0625$$

dla punktu B:

$$N_1 = \tfrac{1}{4}\,(1 - 0.5)\,(1 - 0.25) = 0.09375$$

$$N_2 = ¼ (1 - 0.5) (1 + 0.25) = 0.15625$$

$$N_3 = ¼ (1 + 0.5) (1 + 0.25) = 0.46875$$

$$N_4 = ¼ (1 + 0.5) (1 – 0.25) = 0.28125$$

dla punktu C:

$$N_1 = ¼ (1 - 0.25) (1 – -0.75) = 0.328125$$

$$N_2 = ¼ (1 - 0.25) (1 + -0.75) = 0.046875$$

$$N_3 = ¼ (1 + 0.25) (1 + -0.75) = 0.078125$$

$$N_4 = ¼ (1 + 0.25) (1 – -0.75) = 0.546875$$

Funkcje transformujące wartości współrzędnych z układu lokalnego do globalnego mają postać:

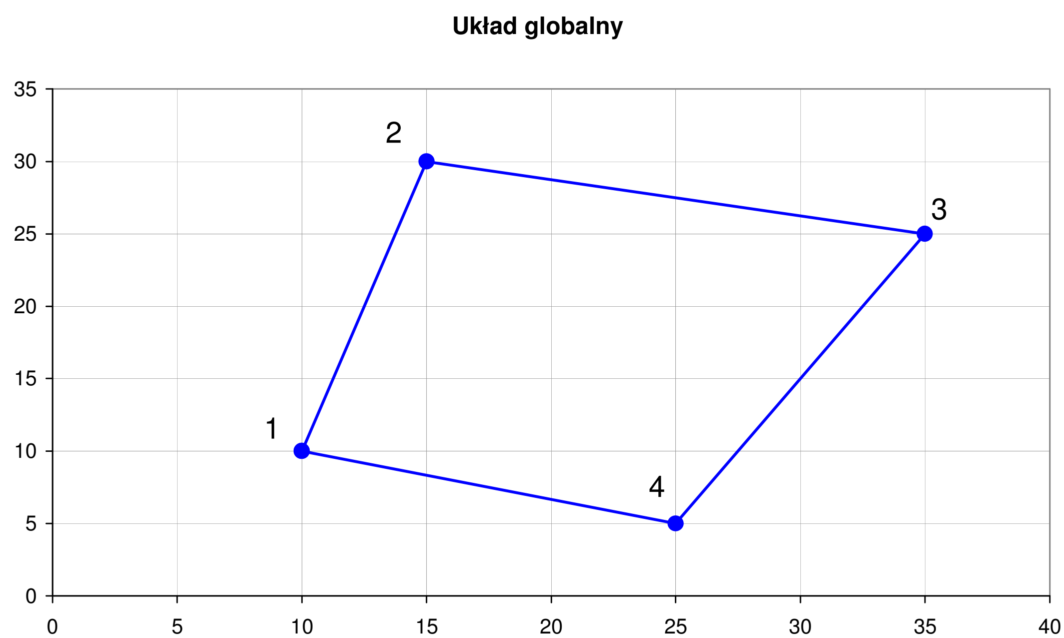
$$\mathbf{x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = [N]\{x\}}$$

$$\mathbf{y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = [N]\{y\}}$$

gdzie za x_i ,y_i podstawiamy współrzędne węzłów w <u>układzie globalnym</u>

Współrzędne wierzchołków w układzie globalnym:

$x_1 = 10$ i $y_1 = 10$; $x_2 = 15$ i $y_2 = 30$; $x_3 = 35$ i $y_3 = 25$; $x_4 = 25$ i $y_4 = 5$;



Zatem współrzędne punktu A w układzie globalnym policzymy z formuł:

Dla punktu A:

$$x_A = 0.1875 * 10 + 0.5625 * 15 + 0.1875 * 35 + 0.0625 * 25 = 18.44$$

$$y_A = 0.1875 * 10 + 0.5625 * 30 + 0.1875 * 25 + 0.0625 * 5 = 23.75$$

Dla punktu B:

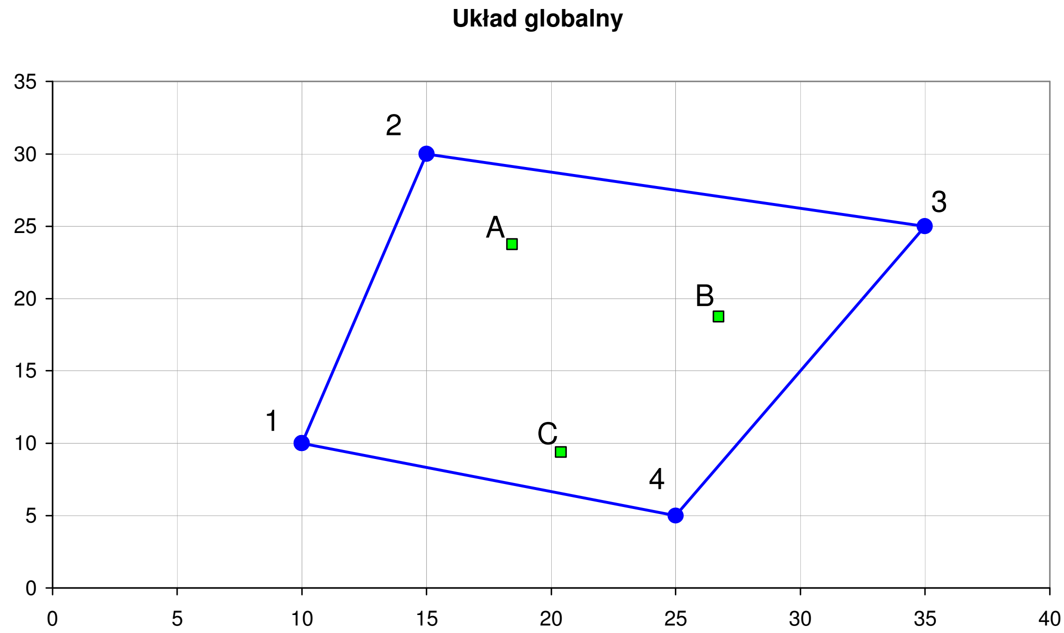
$$x_B = 0.09375 * 10 + 0.15625 * 15 + 0.46875 * 35 + 0.28125 * 25 = 26.72$$

$$y_B = 0.09375 * 10 + 0.15625 * 30 + 0.46875 * 25 + 0.28125 * 5 = 18.75$$

Dla punktu C:

$$x_C = 0.328125 * 10 + 0.046875 * 15 + 0.078125 * 35 + 0.546875 * 25 = 20.39$$

$$y_C = 0.328125 * 10 + 0.046875 * 30 + 0.078125 * 25 + 0.546875 * 5 = 9.38$$



Zadanie 4

Policzyć pochodne funkcji kształtu po zmiennych lokalnych:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -¼\,(1 - \eta) \qquad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -¼\,(1 + \eta) \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = ¼\,(1 + \eta) \qquad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = ¼\,(1 - \eta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -¼\,(1 - \xi) \qquad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = ¼\,(1 - \xi) \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = ¼\,(1 + \xi) \qquad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -¼\,(1 + \xi)$$

Zadanie 5

Policzyć elementy macierzy Jacobiego (można wykorzystać pochodne z zadania 4).

Po podstawieniu równań na funkcje kształtu do równań transformacji współrzędnych otrzymujemy:

$$x = ¼\,(1 - \xi)\,(1 - \eta)\,x_1 + ¼\,(1 - \xi)\,(1 + \eta)\,x_2 + ¼\,(1 + \xi)\,(1 + \eta)\,x_3 + ¼\,(1 + \xi)\,(1 - \eta)\,x_4$$

$$y = ¼\,(1 - \xi)\,(1 - \eta)\,y_1 + ¼\,(1 - \xi)\,(1 + \eta)\,y_2 + ¼\,(1 + \xi)\,(1 + \eta)\,y_3 + ¼\,(1 + \xi)\,(1 - \eta)\,y_4$$

Zatem:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 = -¼ (1 - \eta)\, x_1 - ¼ (1 + \eta)\, x_2 + ¼ (1 + \eta)\, x_3 + ¼ (1 - \eta)\, x_4$$

w miejsce **x** wstawiamy **y** i otrzymujemy:

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 = -¼ (1 - \eta)\, y_1 - ¼ (1 + \eta)\, y_2 + ¼ (1 + \eta)\, y_3 + ¼ (1 - \eta)\, y_4$$

Analogicznie, pozostałe dwa elementy:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 = -¼ (1 - \xi)\, x_1 + ¼ (1 - \xi)\, x_2 + ¼ (1 + \xi)\, x_3 - ¼ (1 + \xi)\, x_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 = -¼ (1 - \xi)\, y_1 + ¼ (1 - \xi)\, y_2 + ¼ (1 + \xi)\, y_3 - ¼ (1 + \xi)\, y_4$$

Zadanie 6

Wyznaczyć macierz sztywności elementu z zadania 3 dla E=10MPa i $\nu = 0.3$ (dla PSO).

1. *Na podstawie parametrów materiałowych: E, ν wyznaczamy macierz [D]:*

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = \frac{10}{(1+0.3)(1-2*0.3)} \begin{bmatrix} 1-0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1-0.3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2*0.3}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 13.46 & 5.77 & 0 \\ 5.77 & 13.46 & 0 \\ 0 & 0 & 3.85 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

2. *Znamy współrzędne czterech węzłów naszego elementu w układzie globalnym ($x_i;y_i$; zad.3):*

   $x_1 = 10$ i $y_1 = 10$; $x_2 = 15$ i $y_2 = 30$; $x_3 = 35$ i $y_3 = 25$; $x_4 = 25$ i $y_4 = 5$;

3. *Obliczamy pochodne* $\frac{\partial N_1}{\partial \xi}, \frac{\partial N_1}{\partial \eta}, \frac{\partial N_2}{\partial \xi}, \frac{\partial N_2}{\partial \eta}, \frac{\partial N_3}{\partial \xi}, \frac{\partial N_3}{\partial \eta}, \frac{\partial N_4}{\partial \xi}, \frac{\partial N_4}{\partial \eta}$ *podstawiając za ξ i η współrzędne punktów Gaussa w układzie lokalnym, czyli* $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}};\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$*; wszystkie pochodne musimy wyznaczyć dla każdego punktu Gaussa niezależnie:*

- pierwszy punkt Gaussa $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}};+\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \approx (-0.577;0.577)$:

$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -¼\,(1 - 0.577) = -0.106$

$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -¼\,(1 + 0.577) = -0.394$

$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = ¼\,(1 + 0.577) = 0.394$

$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = ¼\,(1 - 0.577) = 0.106$

$\frac{\partial N_1}{\partial \eta}$ = -¼ (1 - -0.577) = -0.394

$\frac{\partial N_2}{\partial \eta}$ = ¼ (1 - -0.577) = 0.394

$\frac{\partial N_3}{\partial \eta}$ = ¼ (1 + -0.577) = 0.106

$\frac{\partial N_4}{\partial \eta}$ = -¼ (1 + -0.577) = -0.106

- drugi punkt Gaussa $\left(+\sqrt{\frac{1}{3}};+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$≈(0.577;0.577):

$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}$ = -¼ (1 – 0.577) = -0.106

$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}$ = -¼ (1 + 0.577) = -0.394

$\frac{\partial N_3}{\partial \xi}$ = ¼ (1 + 0.577) = 0.394

$\frac{\partial N_4}{\partial \xi}$ = ¼ (1 – 0.577) = 0.106

$\frac{\partial N_1}{\partial \eta}$ = -¼ (1 - 0.577) = -0.106

$\frac{\partial N_2}{\partial \eta}$ = ¼ (1 - 0.577) = 0.106

$\frac{\partial N_3}{\partial \eta}$ = ¼ (1 + 0.577) = 0.394

$\frac{\partial N_4}{\partial \eta}$ = -¼ (1 + 0.577) = -0.394

- trzeci punkt Gaussa $\left(+\sqrt{\frac{1}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$≈(0.577;-0.577):

$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}$ = -¼ (1 – -0.577) = -0.394

$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}$ = -¼ (1 + -0.577) = -0.106

$\frac{\partial N_3}{\partial \xi}$ = ¼ (1 + -0.577) = 0.106

$\frac{\partial N_4}{\partial \xi}$ = ¼ (1 – -0.577) = 0.394

$\frac{\partial N_1}{\partial \eta}$ = -¼ (1 - 0.577) = -0.106

$\frac{\partial N_2}{\partial \eta}$ = ¼ (1 - -0.577) = 0.394

$\frac{\partial N_3}{\partial \eta}$ = ¼ (1 + 0.577) = 0.394

$\frac{\partial N_4}{\partial \eta}$ = -¼ (1 + -0.577) = -0.106

- czwarty punkt Gaussa $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}};-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$≈(-0.577;-0.577):

$\frac{\partial N_1}{\partial \xi}$ = -¼ (1 – -0.577) = -0.394

$\frac{\partial N_2}{\partial \xi}$ = -¼ (1 + -0.577) = -0.106

$\frac{\partial N_3}{\partial \xi}$ = ¼ (1 + -0.577) = 0.106

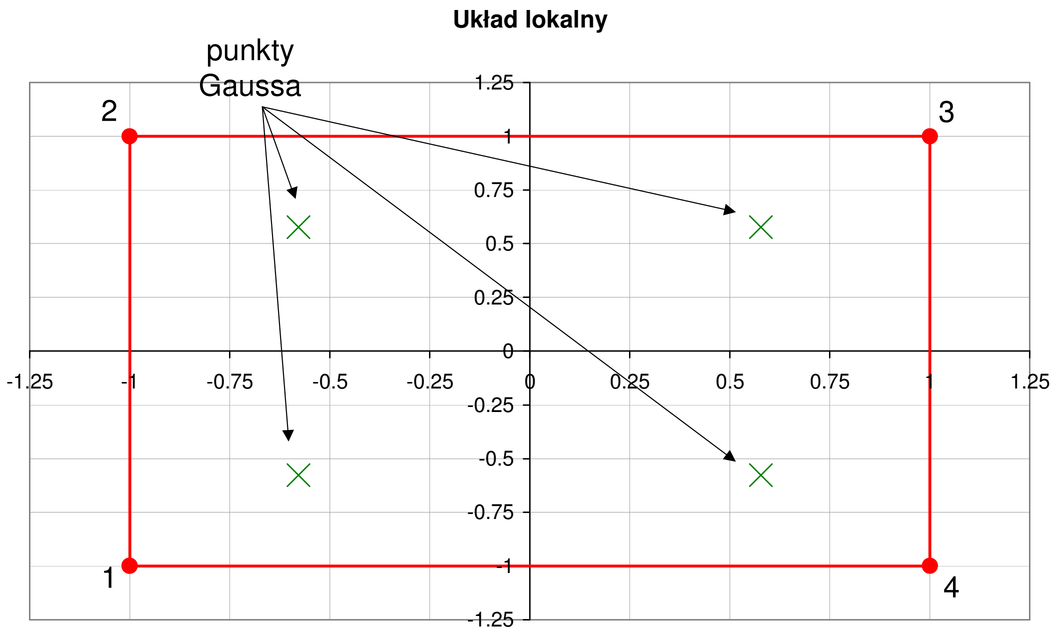
$\frac{\partial N_4}{\partial \xi}$ = ¼ (1 – -0.577) = 0.394

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -¼\ (1 - -0.577) = -0.394$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = ¼\ (1 - -0.577) = 0.394$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = ¼\ (1 + -0.577) = 0.106$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -¼\ (1 + -0.577) = -0.106$$



4. *Obliczamy wartości pochodnych* $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$ *wg wzorów z zadania 5, podstawiając za x i y współrzędne węzłów w układzie globalnym, a za* ξ *i* η *współrzędne punktów Gaussa w układzie lokalnym (po 4 pochodne dla każdego punktu Gaussa, pochodne funkcji kształtu po zmiennych lokalnych już mamy – policzyliśmy je w poprzednim punkcie):*

- dla pierwszego punktu Gaussa

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 = -0.106*10 + -0.394*15 + 0.394*35 + 0.106*25 = 9.47$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 = -0.106*10 + -0.394*30 + 0.394*25 + 0.106*5 = -2.50$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 = -0.394*10 + 0.394*15 + 0.106*35 + -0.106*25 = 3.03$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 = -0.394*10 + 0.394*30 + 0.106*25 + -0.106*5 = 10.00$$

- dla drugiego punktu Gaussa

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 = -0.106*10 + -0.394*15 + 0.394*35 + 0.106*25 = 9.47$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 = -0.106*10 + -0.394*30 + 0.394*25 + 0.106*5 = -2.50$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 = -0.106*10 + 0.106*15 + 0.394*35 + -0.394*25 = 4.47$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 = -0.106*10 + 0.106*30 + 0.394*25 + -0.394*5 = 10.00$$

- dla trzeciego punktu Gaussa

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 = -0.394*10 + -0.106*15 + 0.106*35 + 0.394*25 = 8.03$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 = -0.394*10 + -0.106*30 + 0.106*25 + 0.394*5 = -2.50$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 = -0.106*10 + 0.394*15 + 0.394*35 + -0.106*25 = 15.99$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 = -0.106*10 + 0.394*30 + 0.394*25 + -0.106*5 = 20.08$$

- dla czwartego punktu Gaussa

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 = -0.394*10 + -0.106*15 + 0.106*35 + 0.394*25 = 8.03$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 = -0.394*10 + -0.106*30 + 0.106*25 + 0.394*5 = -2.50$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 = -0.394*10 + 0.394*15 + 0.106*35 + -0.106*25 = 3.03$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 = -0.394*10 + 0.394*30 + 0.106*25 + -0.106*5 = 10.00$$

5. *Obliczamy jakobian dla każdego punktu Gaussa:*

- dla pierwszego punktu Gaussa

$$\det[J]_1 = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 9.47 & -2.50 \\ 3.03 & 10.00 \end{vmatrix} = 102.28$$

- dla drugiego punktu Gaussa

$$\det[J]_2 = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 9.47 & -2.50 \\ 4.47 & 10.00 \end{vmatrix} = 105.88$$

- dla trzeciego punktu Gaussa

$$\det[J]_3 = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 8.03 & -2.50 \\ 15.99 & 20.08 \end{vmatrix} = 201.22$$

- dla czwartego punktu Gaussa

$$\det[J]_4 = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 8.03 & -2.50 \\ 3.03 & 10.00 \end{vmatrix} = 87.88$$

6. *Obliczamy elementy odwróconej macierzy Jacobiego dla każdego punktu Gaussa:*

- dla pierwszego punktu Gaussa

$$[J]_1^{-1} = \frac{1}{\det[J]_1}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{102.28}\begin{bmatrix} 10.00 & 2.50 \\ -3.03 & 9.47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.78 & 2.44 \\ -2.96 & 9.26 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

- dla drugiego punktu Gaussa

$$[J]_2^{-1} = \frac{1}{\det[J]_2}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{105.88}\begin{bmatrix} 10.00 & 2.50 \\ -4.47 & 9.47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.44 & 2.36 \\ -4.22 & 8.94 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

- dla trzeciego punktu Gaussa

$$[J]_3^{-1} = \frac{1}{\det[J]_3}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{201.22}\begin{bmatrix} 20.08 & 2.50 \\ -15.99 & 8.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.98 & 1.24 \\ -7.95 & 3.99 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

- dla czwartego punktu Gaussa

$$[J]_4^{-1} = \frac{1}{\det[J]_4}\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{87.88}\begin{bmatrix} 10.00 & 2.50 \\ -3.03 & 8.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.38 & 2.84 \\ -3.45 & 9.14 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

7. *Mnożymy macierzowo* $[J]^{-1}\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$ *i otrzymujemy* $\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix}$ *dla każdej funkcji* $N_1 \div N_4$ *niezależnie i dla każdego punktu Gaussa też niezależnie:*

- dla pierwszego punktu Gaussa

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{Bmatrix}_1 = [J]_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{Bmatrix}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 9.78 & 2.44 \\ -2.96 & 9.26 \end{bmatrix} 10^{-2} \begin{bmatrix} -0.106 & -0.394 & 0.394 & 0.106 \\ -0.394 & 0.394 & 0.106 & -0.106 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.00 & -2.89 & 4.11 & 0.78 \\ -3.33 & 4.81 & -0.18 & 1.30 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

- dla drugiego punktu Gaussa

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{Bmatrix}_2 = [J]_2^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{Bmatrix}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 9.44 & 2.36 \\ -4.22 & 8.94 \end{bmatrix} 10^{-2} \begin{bmatrix} -0.106 & -0.394 & 0.394 & 0.106 \\ -0.106 & 0.106 & 0.394 & -0.394 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.25 & -3.47 & 4.65 & 0.07 \\ -0.50 & 2.61 & 1.86 & -3.97 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

- dla trzeciego punktu Gaussa

PROSZĘ DOKOŃCZYĆ OBLICZENIA

(dla ułatwienia obliczeń macierzowych można skorzystać z MATLABA)

8. *Z elementów otrzymanych w punkcie 7, tj.* $\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \frac{\partial N_4}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial y}$ *budujemy macierz [B] dla każdego punktu Gaussa osobno:*

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

- dla pierwszego punktu Gaussa

$$[B]_1 = \begin{bmatrix} -2.00 & 0 & -2.89 & 0 & 4.11 & 0 & 0.78 & 0 \\ 0 & -3.33 & 0 & 4.81 & 0 & -0.18 & 0 & 1.30 \\ -3.33 & -2.00 & 4.81 & -2.89 & -0.18 & 4.11 & 1.30 & 0.78 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

- dla drugiego punktu Gaussa

$$[B]_2 = \begin{bmatrix} -1.25 & 0 & -3.47 & 0 & 4.65 & 0 & 0.07 & 0 \\ 0 & -0.50 & 0 & 2.61 & 0 & 1.86 & 0 & -3.97 \\ -0.50 & -1.25 & 2.61 & -3.47 & 1.86 & 4.65 & -3.97 & 0.07 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

- dla trzeciego punktu Gaussa

PROSZĘ DOKOŃCZYĆ UKŁADANIE MACIERZY [B]

9. *Dla każdego punktu Gaussa całkujemy sztywność wg formuły mnożenia macierzowego:*

$$[k] = 1 * \det[J] * [B]^T * [D] * [B]$$

(jedynka na początku to waga punktu Gaussa)

- dla pierwszego punktu Gaussa

$$[k]_1 = 1 * \det[J]_1 * [B]_1^T * [D] * [B]_1 =$$

$$= 1 * 102.28 * \begin{bmatrix} -2.00 & 0 & -3.33 \\ 0 & -3.33 & -2.00 \\ -2.89 & 0 & 4.81 \\ 0 & 4.81 & -2.89 \\ 4.11 & 0 & -0.18 \\ 0 & -0.18 & 4.11 \\ 0.78 & 0 & 1.30 \\ 0 & 1.30 & 0.78 \end{bmatrix} 10^{-2} \begin{bmatrix} 13.46 & 5.77 & 0 \\ 5.77 & 13.46 & 0 \\ 0 & 0 & 3.85 \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{bmatrix} -2.00 & 0 & -2.89 & 0 & 4.11 & 0 & 0.78 & 0 \\ 0 & -3.33 & 0 & 4.81 & 0 & -0.18 & 0 & 1.30 \\ -3.33 & -2.00 & 4.81 & -2.89 & -0.18 & 4.11 & 1.30 & 0.78 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

OBLICZYĆ WYNIK

- dla drugiego punktu Gaussa

$$[k]_2 = 1 * \det[J]_2 * [B]_2^T * [D] * [B]_2 =$$

$$= 1 * 105.88 * \begin{bmatrix} -1.25 & 0 & -0.50 \\ 0 & -0.50 & -1.25 \\ -3.47 & 0 & 2.61 \\ 0 & 2.61 & -3.47 \\ 4.65 & 0 & -1.86 \\ 0 & -1.86 & 4.65 \\ 0.07 & 0 & -3.97 \\ 0 & -3.97 & 0.07 \end{bmatrix} 10^{-2} \begin{bmatrix} 13.46 & 5.77 & 0 \\ 5.77 & 13.46 & 0 \\ 0 & 0 & 3.85 \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{bmatrix} -1.25 & 0 & -3.47 & 0 & 4.65 & 0 & 0.07 & 0 \\ 0 & -0.50 & 0 & 2.61 & 0 & 1.86 & 0 & -3.97 \\ -0.50 & -1.25 & 2.61 & -3.47 & 1.86 & 4.65 & -3.97 & 0.07 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

OBLICZYĆ WYNIK

- dla trzeciego punktu Gaussa

PROSZĘ DOKOŃCZYĆ OBLICZANIE MACIERZY [k]

10. *Składamy macierz sztywności sumując składniki macierzy otrzymanych w pkt.9 dla każdego punktu Gaussa:*

$$[K] = [k]_1 + [k]_2 + [k]_3 + [k]_4$$

PROSZĘ OBLICZYĆ I PODAĆ WYNIK KOŃCOWY