

Metody komputerowe i obliczeniowe

Metoda Elementów Skończonych

Przykład obliczeniowy z elementem czterowęzłowym Q4

Płaski Stan Odształcenia

PROSZĘ SKOPIOWAĆ Z SERWERA KOMPLET FUNKCJI OBLICZENIOWYCH.

Najważniejszą funkcją w zestawie jest funkcja SztynoscQ4PSO, która tworzy macierz sztywności elementu Q4.

```
function kQ4 = SztynoscQ4PSO(E,ni,x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4)
%Wyznacza macierz sztywnosci pojedynczego elementu czworokątnego Q4
%na podstawie parametrow materialowych oraz wspolrzecznych wezlow
%w Płaskim Stanie Odształcenia
%wynik 8x8

%1. Macierz spryzystosci - płaski stan odkształcenia
D = Dpso(E, ni);

%WSPOLRZEDNE PUNKTOW GAUSSA
ksi(1) = -sqrt(1.0 ./ 3.0);
eta(1) = sqrt(1.0 ./ 3.0);

ksi(2) = sqrt(1.0 ./ 3.0);
eta(2) = sqrt(1.0 ./ 3.0);

ksi(3) = sqrt(1.0 ./ 3.0);
eta(3) = -sqrt(1.0 ./ 3.0);

ksi(4) = -sqrt(1.0 ./ 3.0);
eta(4) = -sqrt(1.0 ./ 3.0);

%CAŁKOWANIE = SUMOWANIE PO PUNKTACH GAUSSA
kQ4=zeros(8,8);
for i = 1:4

    %2. Macierz Jacobiego
    Jacobi = Q4J(x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, ksi(i), eta(i));

    %3. Jacobian - wyznacznik z macierzy Jakobiego
    detJacobi = det(Jacobi);

    %4. Odwrocona macierz Jacobiego
    invJacobi = inv(Jacobi);

    %5. Pochodne funkcji kształtu po zmiennych lokalnych
    dNdL = Q4derivNL(ksi(i), eta(i));

    %6. Pochodne funkcji kształtu po zmiennych globalnych
    dNdx = Q4derivNx(invJacobi, dNdL);

    %7. Układanie macierzy B
    B = Q4makeB(dNdx);

    %8. Oblicza iloczyn BT*D*B
    BDB = B' * D * B;

    %9. Oblicza macierz sztywnosci (całkowanie w punkcie Gaussa)
    k = 1.0 * detJacobi * BDB;
```

```

    %10. I sumuje wyniki
    kQ4 = kQ4 + k;
end
%KONIEC SUMOWANIA (CAŁKOWANIA)

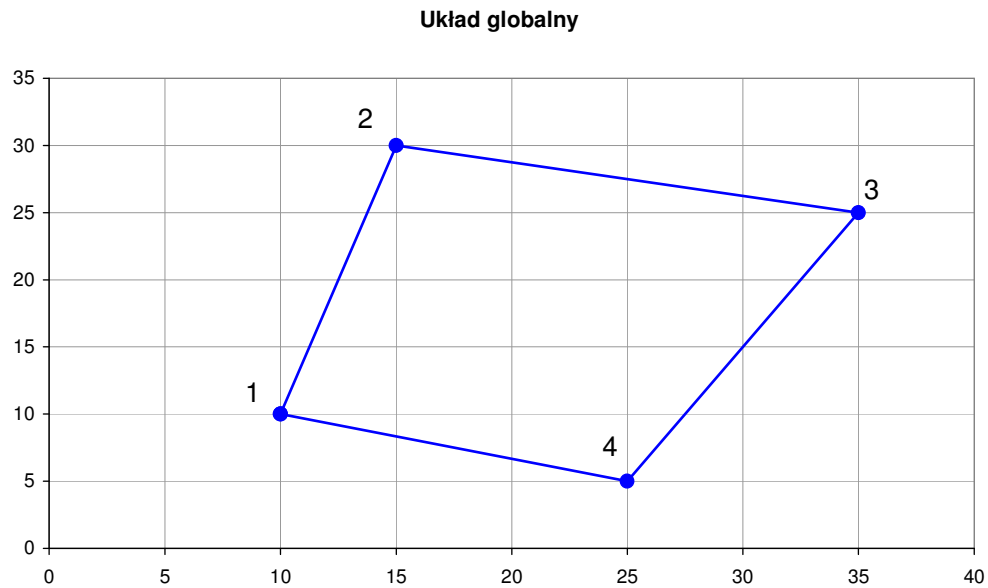
```

Zadanie 1:

Wyznaczyć macierz sztywności elementu z części 5. $E=10\text{MPa}$, $\nu=0.3$

Współrzędne wierzchołków w układzie globalnym:

$$x_1 = 10 \text{ i } y_1 = 10; \quad x_2 = 15 \text{ i } y_2 = 30; \quad x_3 = 35 \text{ i } y_3 = 25; \quad x_4 = 25 \text{ i } y_4 = 5;$$



Operację wykonujemy poleceniem:

```
>>k = SztynoscQ4PSO(10,0.3,10,10,15,30,35,25,25,5)
```

W efekcie powinniśmy uzyskać macierz:

K =

```

7.7534  1.3780  1.0208 -1.8196 -4.1760 -1.6757 -4.5983  2.1174
1.3780  4.3176 -0.8581 -2.7171 -1.6757 -1.0484  1.1558 -0.5521
1.0208 -0.8581  4.7616 -2.4309 -3.8033  1.0897 -1.9791  2.1993
-1.8196 -2.7171 -2.4309  7.1347  2.0512  0.1744  2.1993 -4.5919
-4.1760 -1.6757 -3.8033  2.0512  6.7597  1.4607  1.2196 -1.8362
-1.6757 -1.0484  1.0897  0.1744  1.4607  3.4095 -0.8746 -2.5355
-4.5983  1.1558 -1.9791  2.1993  1.2196 -0.8746  5.3578 -2.4805
2.1174 -0.5521  2.1993 -4.5919 -1.8362 -2.5355 -2.4805  7.6796

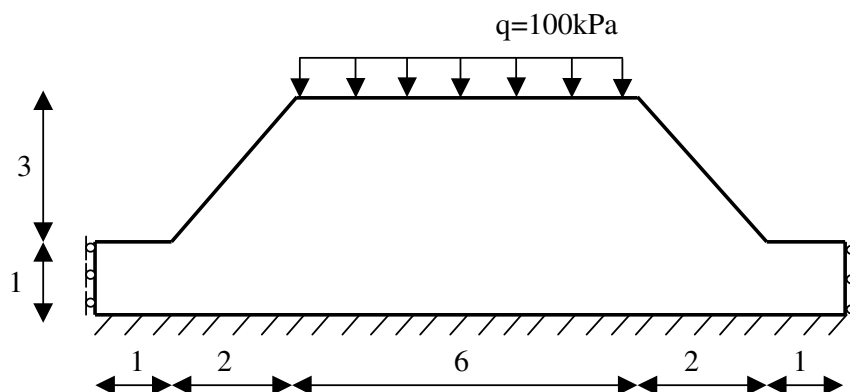
```

PROSZĘ PORÓWNAĆ WYNIK Z OTRZYMANYM Z OBLICZEŃ RĘCZNYCH.

Zadanie 2:

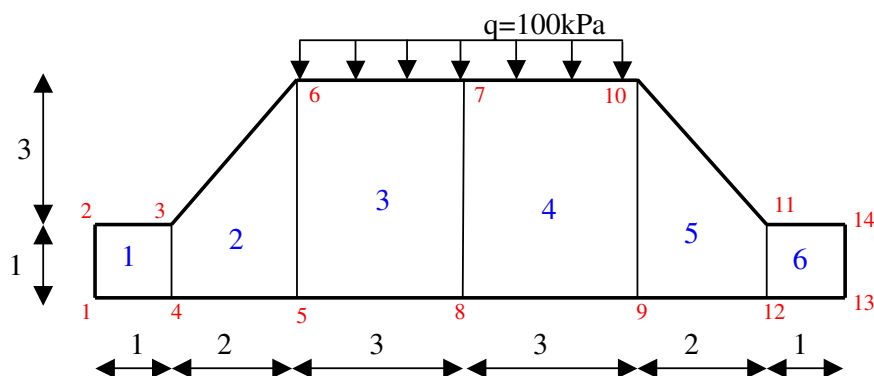
Wyznaczyć przemieszczenia w przekroju nasypu zdyskretyzowanego sześcioma elementami Q4.

Przyjąć $E=20\text{MPa}$, $\nu = 0.3$.



Dyskretyzacja.

Przyjęto 6 elementów Q4. Ponumerowano węzły i elementy.



Warunki brzegowe:

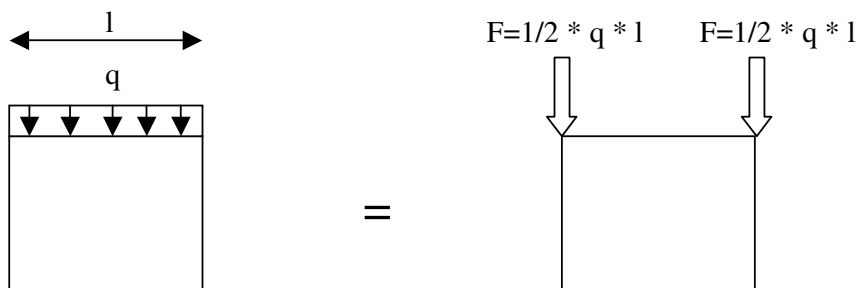
- przemieszczeniowe:

$$u_{1x}=0; u_{1y}=0; u_{4x}=0; u_{4y}=0; u_{5x}=0; u_{5y}=0; u_{8x}=0; u_{8y}=0; u_{9x}=0; u_{9y}=0; u_{12x}=0; u_{12y}=0; u_{13x}=0; u_{13y}=0;$$

$$u_{2x}=0; u_{14x}=0;$$

- obciążeniowe:

tak jak poprzednio, musimy zamienić obciążenie równomiernie rozłożone na ekwiwalentne obciążenia węzłowe, tym razem wg formuły:



zatem:

$$f_{6y} = -0.5 * 100 * 3 = -150\text{kN}$$

$$f_{7y} = -0.5 * 100 * 3 - 0.5 * 100 * 3 = -300\text{kN}$$

$$f_{10y} = -0.5 * 100 * 3 = -150\text{kN}$$

Mamy zdefiniowane elementy:

Element	Węzły	Współrzędne węzłów
1	1, 2, 3, 4	(0,0) (0,1) (1,1) (1,0)
2	4, 3, 6, 5	(1,0) (1,1) (3,4) (3,0)
3	5, 6, 7, 8	(3,0) (3,4) (6,4) (6,0)
4	8, 7, 10, 9	(6,0) (6,4) (9,4) (9,0)
5	9, 10, 11, 12	(9,0) (9,4) (11,1) (11,0)
6	12, 11, 14, 13	(11,0) (11,1) (12,1) (12,0)

Tworzymy 6 macierzy sztywności (po jednej dla każdego elementu):

```
>>k1 = SztywnoscQ4PSO(20.0,0.3,0,0,0,1,1,1,1,0);  
>>k2 = SztywnoscQ4PSO(20.0,0.3,1,0,1,1,3,4,3,0);  
>>k3 = SztywnoscQ4PSO(20.0,0.3,3,0,3,4,6,4,6,0);  
>>k4 = SztywnoscQ4PSO(20.0,0.3,6,0,6,4,9,4,9,0);  
>>k5 = SztywnoscQ4PSO(20.0,0.3,9,0,9,4,11,1,11,0);  
>>k6 = SztywnoscQ4PSO(20.0,0.3,11,0,11,1,12,1,12,0);
```

a następnie składamy je w jedną macierz sztywności dla całego układu (wymiar 14*2x14*2):

```
>>K = zeros(28,28);  
>>K = ZlozSztywnosciQ4(K,k1,1,2,3,4);  
>>K = ZlozSztywnosciQ4(K,k2,4,3,6,5);  
>>K = ZlozSztywnosciQ4(K,k3,5,6,7,8);  
>>K = ZlozSztywnosciQ4(K,k4,8,7,10,9);  
>>K = ZlozSztywnosciQ4(K,k5,9,10,11,12);  
>>K = ZlozSztywnosciQ4(K,k6,12,11,14,13);
```

Z macierzy sztywności potrzebujemy tylko te wiersze i kolumny, które odpowiadają nieznanym przemieszczeniom, zatem wycinamy następujące wiersze i kolumny: 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 27. Resztę kopiujemy do roboczej macierzy k:

```
>>k = [K(4:6,4:6) K(4:6,11:14) K(4:6,19:22) K(4:6,28) ; K(11:14,4:6)  
K(11:14,11:14) K(11:14,19:22) K(11:14,28) ; K(19:22,4:6) K(19:22,11:14)  
K(19:22,19:22) K(19:22,28); K(28,4:6) K(28,11:14) K(28,19:22) K(28,28)];
```

Tworzymy wektor ze znanymi obciążeniami (jednostki!):

```
>>f = [0 ; 0 ; 0 ; 0 ; -0.15 ; 0 ; -0.3 ; 0 ; -0.15 ; 0 ; 0 ; 0];
```

i wyznaczamy nieznanne przemieszczenia poleceniem:

```
>>u = k\f
```

Otrzymujemy:

```
u =  
    0.00004969604298  
   -0.00107648012192  
    0.00024006380307  
   -0.00297413759132  
   -0.00995627081270  
   -0.00000000000000  
   -0.01511310919714  
    0.00297413759132  
   -0.00995627081270  
    0.00107648012192  
    0.00024006380307  
    0.00004969604298
```

Uzupełniamy wektor wyników o znane przemieszczeniowe warunki brzegowe:

```
>>U = [0 ; 0 ; 0 ; u(1:3) ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; u(4:7) ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; u(8:11) ; 0  
      ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; u(12)];
```

A teraz narysujemy nasz odkształcony nasyp:

najpierw zapiszemy współrzędne węzłów (po kolei, najpierw x potem y):

```
>>wx = [0 0 1 1 3 3 6 6 9 9 11 11 12 12];  
>>wy = [0 1 1 0 0 4 4 0 0 4 1 0 0 1];
```

potem zapiszemy definicje elementów (tzn. ustawimy kolejność współrzędnych węzłów:

```
>>x = [wx(1) wx(2) wx(3) wx(4) wx(4) wx(3) wx(6) wx(5) wx(5) wx(6) wx(7) wx(8)  
      wx(8) wx(7) wx(10) wx(9) wx(9) wx(10) wx(11) wx(12) wx(12) wx(11) wx(14)  
      wx(13)];  
>>y = [wy(1) wy(2) wy(3) wy(4) wy(4) wy(3) wy(6) wy(5) wy(5) wy(6) wy(7) wy(8)  
      wy(8) wy(7) wy(10) wy(9) wy(9) wy(10) wy(11) wy(12) wy(12) wy(11) wy(14)  
      wy(13)];
```

w końcu wprowadzimy do danych wyniki obliczeń z mnożnikiem 50 dla przemieszczeń (żeby było je widać):

```
>>ux = [U(1) U(3) U(5) U(7) U(7) U(5) U(11) U(9) U(9) U(11) U(13) U(15) U(15)  
      U(13) U(19) U(17) U(17) U(19) U(21) U(23) U(23) U(21) U(27) U(25)];  
>>ux = x + ux .* 50  
>>uy = [U(2) U(4) U(6) U(8) U(8) U(6) U(12) U(10) U(10) U(12) U(14) U(16) U(16)  
      U(14) U(20) U(18) U(18) U(20) U(22) U(24) U(24) U(22) U(28) U(26)];
```

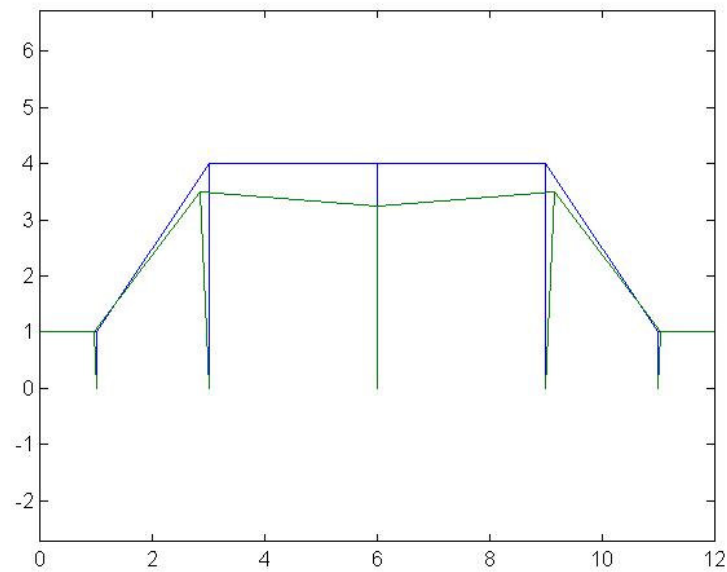
```
>>uy = y + uy .* 50
```

i rysujemy:

```
>>plot(x,y,ux,uy)
```

```
>>axis equal
```

i powinien pojawić się obrazek:



Proszę zwrócić uwagę, że wystąpiło zjawisko kontraktancji, tj. zmniejszenie objętości materiału, co jest charakterystyczne dla sprężystości.

Zadanie 3:

Powtórzyć zadanie nr 2 dla innej dyskretyzacji elementami Q4.