

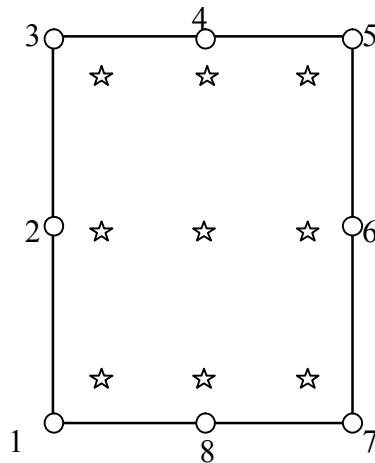
## Metody komputerowe i obliczeniowe

### Metoda Elementów Skończonych

#### Przykład obliczeniowy z elementem ośmiowęzłowym Q8

##### Stan Osiowo-symetryczny

Na poprzedniej lekcji rozwiązywaliśmy zadania w płaskim stanie naprężenia wyznaczając stan przemieszczenia w węzłach i stan naprężenia oraz odkształcenia w punktach Gaussa. Teraz rozwiążemy przykład zadania w innym, szczególnym przypadku przestrzennego stanu – stanu osiowo-symetrycznego, stosując bardziej rozbudowany element MES – czworokąt z ośmioma węzłami i dziewięcioma punktami Gaussa (zaznaczonymi gwiazdkami). UWAGA! Kolejność numeracji węzłów ma znaczenie ze względu na różne wagi punktów Gaussa, znajdujących się w pobliżu tych węzłów!



Przy okazji rozwiązywania przykładów obliczeniowych wyznaczymy w punktach Gaussa wartości funkcji kryterium Coulomba-Mohra, które dostarczą nam informacji o fazie pracy materiału. Funkcja kryterium ma postać:

$$F = p \cdot \sin(\Phi) + \sqrt{3} \cdot J \cdot \left( \frac{\cos(\Theta)}{\sqrt{3}} - \frac{\sin(\Theta) \cdot \sin(\Phi)}{3} \right) - c \cdot \cos(\Phi),$$

gdzie:  $\Phi$ ,  $c$  – parametry wytrzymałościowe (kąt tarcia wewnętrznego, spójność);  $p$ ,  $J$ ,  $\Theta$  – niezmienniki stanu naprężenia:

$$p = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\Theta = -\frac{1}{3} \cdot \arcsin\left(\frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot J_3}{2 \cdot J^3}\right)$$

$$J_3 = (\sigma_x - p)(\sigma_y - p)(\sigma_z - p) - (\sigma_x - p)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - p)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - p)\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}$$

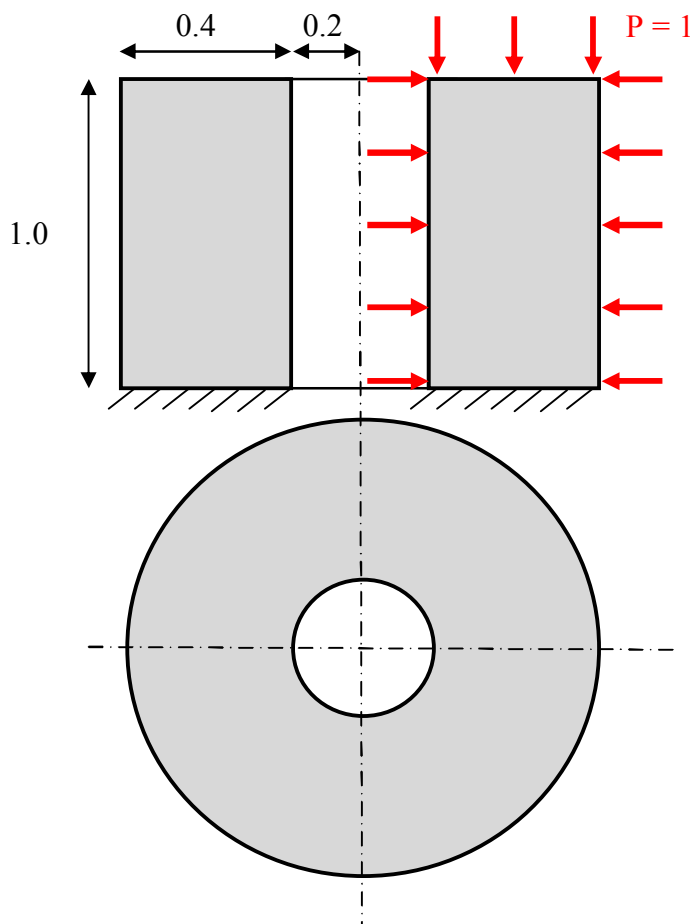
$$J = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot \tau_{xy}^2 + 6 \cdot \tau_{yz}^2 + 6 \cdot \tau_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Funkcja  $F$  przyjmuje wartości ujemne, jeśli materiał znajduje się w stanie sprężystym (bezpiecznym) oraz wartość równą 0 (zero), jeśli materiał przeszedł w stan plastyczny.

PROSZĘ SKOPIOWAĆ Z SERWERA KOMPLET FUNKCJI OBLICZENIOWYCH.

### Zadanie 1.

Wyznaczyć przemieszczenia i stan naprężenia w pierścieniu przedstawionym na rysunku. Przyjąć  $E=100\text{MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\Phi = 20^\circ$ ,  $c = 10\text{kPa}$  i obciążenie jak na rysunku poniżej.

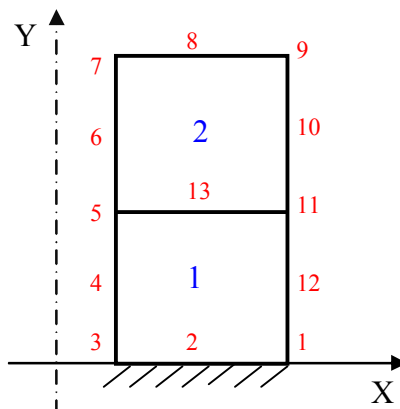


UWAGA! Przedstawiono tylko obciążenie symetrycznej części przekroju.

Rozwiązanie:

#### Krok 1 – dyskretyzacja zadania

Obliczenia prowadzimy dla jednego przekroju symetrycznego względem osi. Przekrój dzielimy na elementy i węzły: na rysunku poniżej zaznaczono ponumerowane węzły i elementy.



## Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Wprowadzamy zmienne globalne, które przechowują dane materiałowe i geometryczne naszego zadania:  $E$ ,  $\nu$ ,  $\Phi$ ,  $c$  oraz współrzędne węzłów:

```
>>E = 1e5
>>ni = 0.3
>>Fi = 20
>>c = 10
>>x1 = 0.6
>>y1 = 0
>>x2 = 0.4
>>y2 = 0
>>x3 = 0.2
>>y3 = 0
>>x4 = 0.2
>>y4 = 0.25
>>x5 = 0.2
>>y5 = 0.5
>>x6 = 0.2
>>y6 = 0.75
>>x7 = 0.2
>>y7 = 1.0
>>x8 = 0.4
>>y8 = 1.0
>>x9 = 0.6
>>y9 = 1.0
>>x10 = 0.6
>>y10 = 0.75
>>x11 = 0.6
>>y11 = 0.5
>>x12 = 0.6
>>y12 = 0.25
>>x13 = 0.4
>>y13 = 0.5
```

Mamy dwa elementy, zatem tworzymy dwie macierze sztywności:  $k_1$  i  $k_2$  komendami:

```
>>k1 = SztynoscQ8AX( E, ni, x3, y3, x4, y4, x5, y5, x13, y13, x11, y11, x12,
y12, x1, y1, x2, y2 )
>>k2 = SztynoscQ8AX( E, ni, x5, y5, x6, y6, x7, y7, x8, y8, x9, y9, x10, y10,
x11, y11, x13, y13 )
```

Proszę zwrócić uwagę na kolejność węzłów. W stanie osiowo-symetrycznym obliczenia domyślnie prowadzimy dla  $t = 1[\text{rad}]$  lub  $t = 2\pi[\text{rad}]$ , zależnie od sytuacji. W obu przypadkach składniki macierzy sztywności elementu są wymnażane przez  $t$  (podobnie było w Płaskim Stanie Naprężenia).

## Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Ponieważ w układzie mamy 13 węzłów, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar  $2 \times 13 \times 2 \times 13 = 26 \times 26$ . Macierz  $K$  należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K = zeros(26,26)
```

Ponieważ mamy dwa elementy, to funkcję `ZlozSztynosciQ8AX` trzeba wywołać dwa razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz  $K$  (która jest wynikiem), macierz elementu  $k$  ( $k_1$ , a potem  $k_2$ ) i numery węzłów definiujące dany element:

```
>>K = ZlozSztynosciQ8AX( K, k1, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2 )
```

```
>>K = ZlozSzywnosciQ8AX( K, k2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 )
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawiają się sumowane sztywności poszczególnych elementów (PROSZĘ SPRAWDZIĆ!).

#### Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Warunki brzegowe:

- przemieszczeniowe:

$u_{1x}=0$ ;  $u_{1y}=0$ ;  $u_{2x}=0$ ;  $u_{2y}=0$ ;  $u_{3x}=0$ ;  $u_{3y}=0$ ;

- obciążeniowe (zbieramy z okręgu o obwodzie  $2\pi r$ ):

$f_{4x}=2\cdot\pi\cdot0.2$ ;  $f_{4y}=0$ ;  $f_{5x}=2\cdot\pi\cdot0.2$ ;  $f_{5y}=0$ ;  $f_{6x}=2\cdot\pi\cdot0.2$ ;  $f_{6y}=0$ ;  $f_{7x}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\cdot0.2$ ;  $f_{7y}=-\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\cdot0.2$ ;

$f_{8x}=0$ ;  $f_{8y}=-2\cdot\pi\cdot0.4$ ;  $f_{9x}=-\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\cdot0.6$ ;  $f_{9y}=-\frac{1}{2}\cdot2\cdot\pi\cdot0.6$ ;  $f_{10x}=-2\cdot\pi\cdot0.6$ ;  $f_{10y}=0$ ;

$f_{11x}=-2\cdot\pi\cdot0.6$ ;  $f_{11y}=0$ ;  $f_{12x}=-2\cdot\pi\cdot0.6$ ;  $f_{12y}=0$ ;  $f_{13x}=0$ ;  $f_{13y}=0$ ;

Uwaga: nie przykładamy obciążeń w węzłach 1 i 3, bo węzły te są podporami – obciążenia przejdą w reakcje z „pominięciem” udziału konstrukcji. Z macierzy sztywności potrzebujemy tylko te wiersze i kolumny, które odpowiadają nieznanym przemieszczeniom, zatem wycinamy następujące wiersze i kolumny: 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Resztę kopiujemy do roboczej macierzy k:

```
>>k = K(7:26,7:26)
```

Tworzymy wektor ze znanymi obciążeniami ( $f_{4x}$ ;  $f_{4y}$ ;  $f_{5x}$ ;  $f_{5y}$ ;  $f_{6x}$ ;  $f_{6y}$ ;  $f_{7x}$ ;  $f_{7y}$ ;  $f_{8x}$ ;  $f_{8y}$ ;  $f_{9x}$ ;  $f_{9y}$ ;  $f_{10x}$ ;  $f_{10y}$ ;  $f_{11x}$ ;  $f_{11y}$ ;  $f_{12x}$ ;  $f_{12y}$ ;  $f_{13x}$ ;  $f_{13y}$ );

```
>> f = [2.*pi.*0.2; 0; 2.*pi.*0.2; 0; 2.*pi.*0.2; 0; pi.*0.2; -pi.*0.2; 0.0;
        -2.*pi.*0.4; -pi.*0.6; -pi.*0.6; -2.*pi.*0.6; 0; -2.*pi.*0.6; 0; -2.*pi.*0.6;
        0; 0; 0];
```

i wyznaczamy nieznanne przemieszczenia rozwiązując układ równań liniowych poleceniem:

```
>>u = k\f
```

#### Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich niepodpartych węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor:

```
>>U = [0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; u]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F = K * U
```

Narysujmy układ pierwotny i odkształcony. Najpierw przygotujemy wygodne do rysowania wektory współrzędnych:

```
>>xi = [x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13]
>>yi = [y1 y2 y3 y4 y5 y6 y7 y8 y9 y10 y11 y12 y13]
```

a potem wykonajmy polecenia (ostatnia liczba 100 to skala, można ją zwiększyć, żeby uczytelnić wykres):

```
>>rysuj(3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, xi, yi, U, 100)
```

```
>> rysuj(5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, xi, yi, U, 100)
```

na ekranie powinien pojawić się rysunek z niebieskimi liniami oznaczającymi przekrój nieobciążony i czerwonymi konturami przekroju odkształconego.

Składowe stanu odkształcenia i naprężenia w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `epsigQ8AX`, której parametrami są: cztery parametry materiałowe, numery węzłów definiujących element, początkowe wartości stanu odkształcenia i naprężenia (zerowe), wektor przemieszczeń wszystkich węzłów oraz dwa wektory ze współrzędnymi wszystkich węzłów. Najpierw ustalmy początkowy, zerowy stan odkształceń i naprężeń (przed obciążeniem):

- dla pierwszego elementu (4 składowe stanu osiowosymetrycznego odkształcenia  $[\varepsilon_r \ \varepsilon_y \ \gamma_{ry} \ \varepsilon_\theta]^T$  i naprężenia  $[\sigma_r \ \sigma_y \ \tau_{ry} \ \sigma_\theta]^T$ , 9 punktów Gaussa)

```
>> eps1 = zeros(4,9)
>> sig1 = zeros(4,9)
```

- dla drugiego elementu (j.w.)

```
>> eps2 = zeros(4,9)
>> sig2 = zeros(4,9)
```

A teraz uaktualnimy stan odkształcenia i naprężenia w punktach Gaussa poleceniami:

```
>>[eps1, sig1, Fc1] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, eps1,
sig1, U, xi, yi );
>>[eps2, sig2, Fc2] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, eps1,
sig1, U, xi, yi );
```

Pisząc:

```
>>eps1
```

lub

```
>>sig1
```

można zobaczyć dla pierwszego elementu wartości składowych stanu w poszczególnych punktach Gaussa. Natomiast  $Fc$  zawiera wartości funkcji kryterium. Wykonując polecenie:

```
>>rysujFc(Fc1)
```

można wyświetlić histogram wartości  $Fc$  dla wszystkich punktów Gaussa w pierwszym elemencie, a pisząc:

```
>>rysujFc(Fc2)
```

w drugim elemencie.

Wyniki pokazują, że konstrukcja pracuje w stanie sprężystym (wszystkie wartości  $Fc$  są ujemne).

## **Zadanie 2:**

***Sprawdzić, czy po pięciokrotnym zwiększeniu obciążenia układ z zadania nr 1 przejdzie w stan plastyczny.***

Rozwiązanie:

Należy zauważyć, że obliczenia prowadzimy według dotychczasowych założeń, tzn. stosując liniowo-sprężyste prawo Hooke'a. Zatem, przemieszczenia są proporcjonalne do obciążeń, a

odkształcenia i naprężenia – do przemieszczeń. Aby odpowiedzieć na pytanie: przy jakim obciążeniu materiał przejdzie w stan plastyczny wystarczy zwiększać proporcjonalnie wektor przemieszczeń i wyliczać stan odkształcenia i naprężenia sprawdzając znak funkcji kryterium  $F_c$ . Poprzedni wynik  $U$  zawiera przemieszczenia węzłów uzyskane z jednostkowego obciążenia  $P=1$  (pierwszy rysunek w zadaniu nr 1). Chcąc otrzymać przemieszczenia dla  $P=2$  wystarczy  $U$  pomnożyć przez 2. Zrobimy to tak: zapiszemy  $U$  jako  $dU$ , czyli potraktujemy  $U$  jako pewien przyrost przemieszczeń jaki powstaje przez przyłożenie układu sił  $P=1$ :

```
>>dU = U
```

a potem wykonujemy kroki:

**a)** zwiększymy oryginalne  $U$  o  $dU$  (to tak, jakbyśmy pomnożyli  $U$  przez 2):

```
>>U = U + dU
```

**b)** uaktualnimy stan odkształcenia i naprężenia w punktach Gaussa poleceniami:

```
>>[eps1, sig1, Fc1] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, eps1, sig1, dU, xi, yi );  
>>[eps2, sig2, Fc2] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, eps1, sig1, dU, xi, yi );
```

(UWAGA!  $eps1$  i  $sig1$  są uaktualniane, tzn. do poprzednich wartości dodawane są poprawki wynikające ze zwiększenia przemieszczeń - w procedurze `epsigQ8AX` podajemy  $dU$  a nie  $U$ !)

**c)** rysujemy zdeformowany przekrój:

```
>>rysuj(3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, xi, yi, U, 100)  
>>rysuj(5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, xi, yi, U, 100)
```

oraz histogramy wartości  $F_c$ :

```
>>rysujFc(Fc1)  
>>rysujFc(Fc2)
```

**d)** sprawdzamy, czy w którymś punkcie Gaussa  $F_c$  stało się dodatnie.

Kroki a)-d) wykonujemy cztery razy (tzn. oglądamy efekty pięciokrotnie zwiększonego obciążenia).

### **Zadanie 3**

**Proszę rozwiązać układ przedstawiony w zadaniu nr 1, przyjmując tylko obciążenie pionowe.**

Podpowiedź:

```
>>f = [ 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -pi.*0.2; 0.0; -2.*pi.*0.4; 0; -pi.*0.6; 0; 0; 0;  
0; 0; 0; 0; 0]
```

### **Zadanie 4**

**Proszę zrealizować procedurę z zadania nr 2, przyjmując obciążenie z zadania nr 3.**

**Czy udało się uplastyczyć materiał po pięciokrotnym zwiększeniu obciążenia?**