

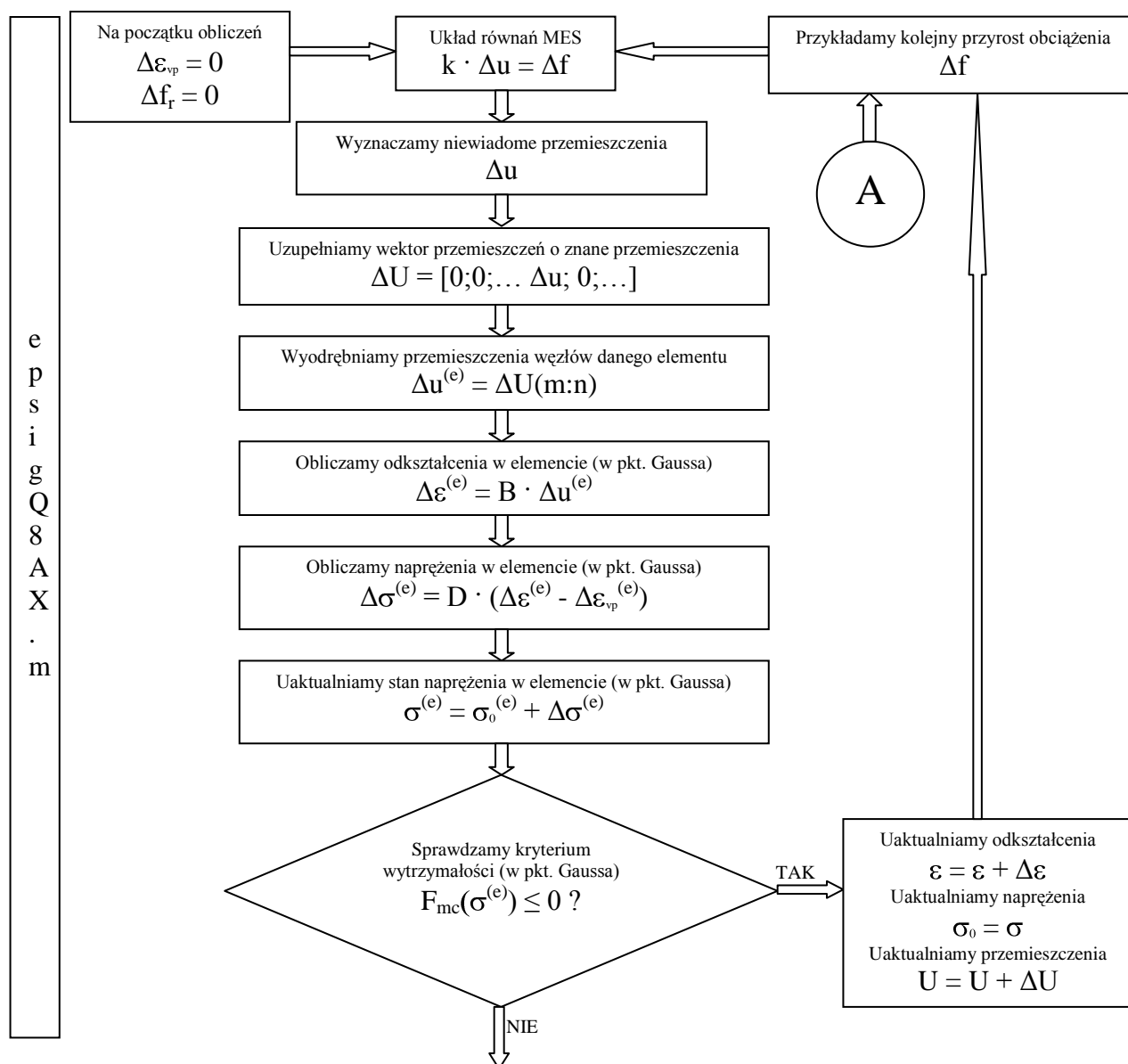
## Metody komputerowe i obliczeniowe

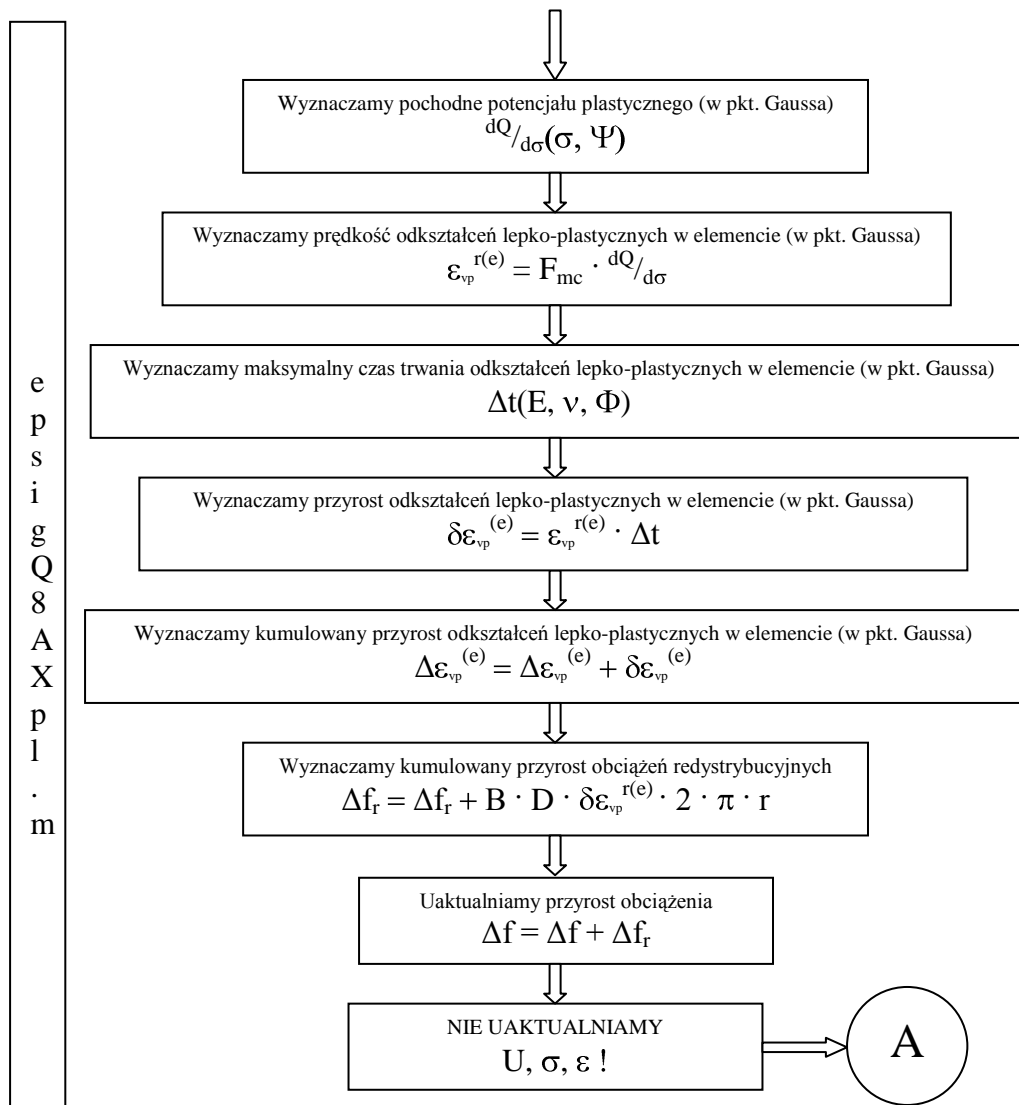
### Metoda Elementów Skończonych

#### Przykład obliczeniowy z elementem ośmiowęzłowym Q8

#### Stan Osiowo-symetryczny – model sprężysto-plastyczny

Na poprzednich zajęciach rozwiązywaliśmy zadania w osiowo-symetrycznym stanie naprężenia i odkształcenia stosując ośmiowęzłowy element Q8 z dziewięcioma punktami Gaussa. Po rozwiązaniu zadania nr 4 okazało się, że materiał nie był w stanie przenieść pięciokrotnie zwiększonego obciążenia – kryterium wytrzymałości zostało przekroczone, co można było poznać po dodatnich wartościach funkcji  $F_{mc}$  w niektórych punktach Gaussa. Taka sytuacja nie jest możliwa w rzeczywistości ze względu na przyjęcie założenia, że stan naprężenia w materiale nie może być reprezentowany przez punkt w przestrzeni naprężeń, który leży poza obwiednią wytrzymałości (tzn.  $F_{mc}$  może być ujemne albo równe zero, ale nie może być dodatnie). Na tych zajęciach poznamy technikę redystrybucji sił wewnętrznych w elementach, która umożliwi „sprowadzenie” wartości funkcji  $F_{mc}$  na powierzchnię wytrzymałości (czyli „sprowadzenie” wartości  $F_{mc}$  do zera). Algorytm obliczeniowy ma postać (jest to algorytm odkształceń lepko-plastycznych):

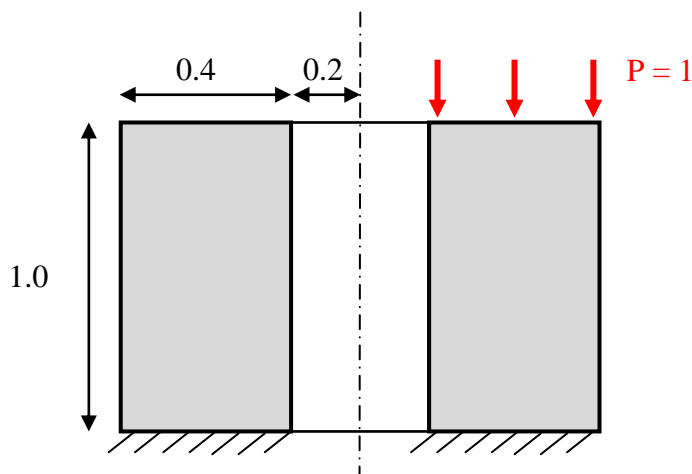




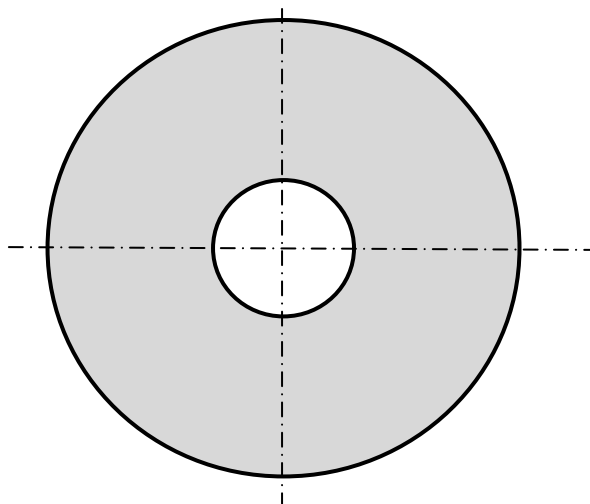
**PROSZĘ SKOPIOWAĆ Z SERWERA KOMPLET FUNKCJI OBLICZENIOWYCH.**

### Zadanie 1.

*Wyznaczyć przemieszczenia i stan naprężenia w pierścieniu przedstawionym na rysunku. Przyjąć  $E=100\text{MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\Phi = 20^\circ$ ,  $c = 10\text{kPa}$ ,  $\Psi = 20^\circ$  i obciążenie jak na rysunku poniżej.*



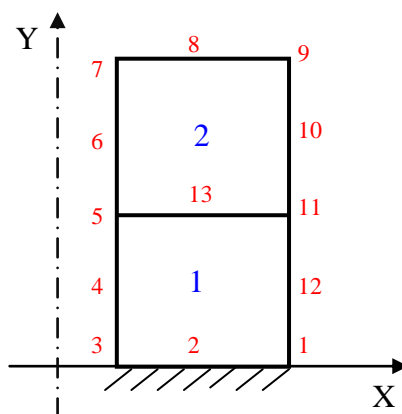
UWAGA! Przedstawiono tylko obciążenie symetrycznej części przekroju. Jest to  $\Delta F$  w naszych obliczeniach!



Rozwiązanie:

### Krok 1 – dyskretyzacja zadania

Obliczenia prowadzimy dla jednego przekroju symetrycznego względem osi. Przekrój dzielimy na elementy i węzły: na rysunku poniżej zaznaczono ponumerowane węzły i elementy.



### Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Wprowadzamy zmienne globalne, które przechowują dane materiałowe i geometryczne naszego zadania:  $E$ ,  $\nu$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $c$  oraz współrzędne węzłów.

### Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Ponieważ w układzie mamy 13 węzłów, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar  $2 \times 13 \times 2 \times 13 = 26 \times 26$ .

### Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Warunki brzegowe:

- przemieszczeniowe:

$$u_{1x}=0; u_{1y}=0; u_{2x}=0; u_{2y}=0; u_{3x}=0; u_{3y}=0;$$

- obciążeniowe (zbieramy z okręgu o obwodzie  $2\pi r$ ):

$$\Delta f_{4x}=\Delta f_{4y}=\Delta f_{5x}=\Delta f_{5y}=\Delta f_{6x}=\Delta f_{6y}=\Delta f_{7x}=0; \Delta f_{7y}=-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0.2; \Delta f_{8x}=0; \Delta f_{8y}=-2 \cdot \pi \cdot 0.4; \Delta f_{9x}=0;$$

$$\Delta f_{9y} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0.6; \Delta f_{10x} = \Delta f_{10y} = \Delta f_{11x} = \Delta f_{11y} = \Delta f_{12x} = \Delta f_{12y} = \Delta f_{13x} = \Delta f_{13y} = 0;$$

### Krok 5 – rozwiązujemy układ równań $k \cdot u = f$

### Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich niepodpartych węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach, odkształcenia, naprężenia i sprawdzić kryterium wytrzymałości w każdym punkcie Gaussa każdego elementu. Ponieważ zadanie to zostało już zrobione na poprzednich zajęciach, wystarczy wywołać polecenie:

```
>>zadanie
```

aby odtworzyć kompletny stan danych. A teraz przyłożymy cztery razy przyrost obciążenia  $\Delta f$  obserwując znak wartości funkcji  $Fmc$  w punktach Gaussa:

#### - pierwszy przyrost obciążenia

- rozwiązanie układu równań

```
>>du=k\df
```

- agregacja przyrostu odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>dU = [0;0;0;0;0;0;0;0;du]
```

- agregacja całkowitych odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>U = U + dU
```

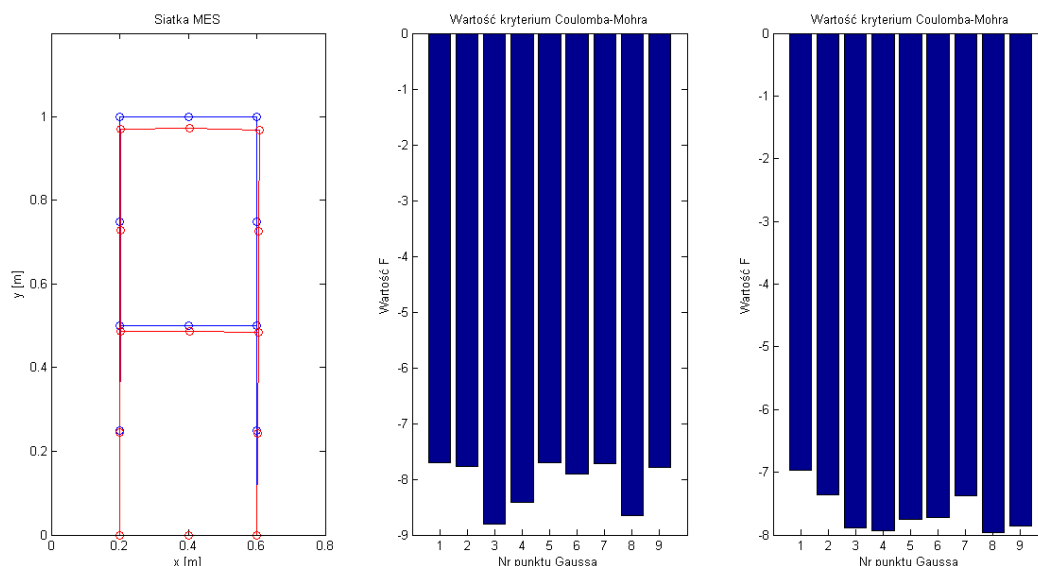
- wyznaczenie stanu odkształceń i naprężeń dla każdego elementu niezależnie

```
>>[eps1, sig1, Fc1] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, eps1, sig1, dU, xi, yi )
>>[eps2, sig2, Fc2] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, eps2, sig2, dU, xi, yi )
```

- graficzna prezentacja wyników (odkształcenia i wartości  $Fmc$  w pkt. Gaussa)

```
>>pokaz( xi, yi, U, Fc1, Fc2 )
```

Powinien pojawić się rysunek:



### - drugi przyrost obciążenia

- rozwiązanie układu równań

```
>>du=k\df
```

- agregacja przyrostu odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>dU = [0;0;0;0;0;0;0;du]
```

- agregacja całkowitych odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>U = U + dU
```

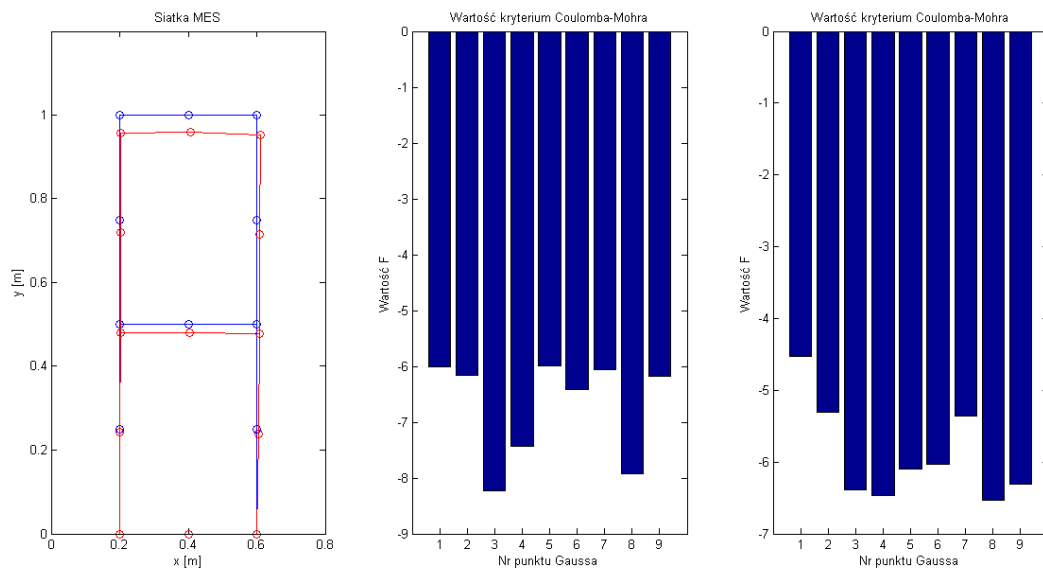
- wyznaczenie stanu odkształceń i naprężeń dla każdego elementu niezależnie

```
>>[eps1, sig1, Fc1] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, eps1, sig1, dU, xi, yi )  
>>[eps2, sig2, Fc2] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, eps2, sig2, dU, xi, yi )
```

- graficzna prezentacja wyników (odkształcenia i wartości  $Fmc$  w pkt. Gaussa)

```
>>pokaz( xi, yi, U, Fc1, Fc2 )
```

Powinien pojawić się rysunek:



### - trzeci przyrost obciążenia

- rozwiązanie układu równań

```
>>du=k\df
```

- agregacja przyrostu odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>dU = [0;0;0;0;0;0;0;du]
```

- agregacja całkowitych odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>U = U + dU
```

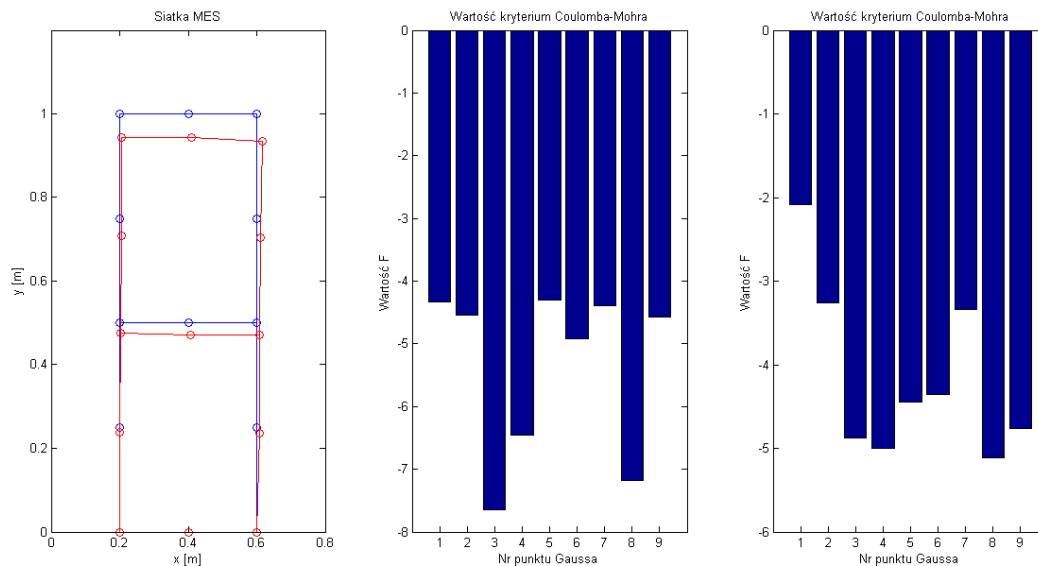
- wyznaczenie stanu odkształceń i naprężeń dla każdego elementu niezależnie

```
>>[eps1, sig1, Fc1] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, eps1,
sig1, dU, xi, yi )
>>[eps2, sig2, Fc2] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, eps2,
sig2, dU, xi, yi )
```

- graficzna prezentacja wyników (odkształcenia i wartości  $Fmc$  w pkt. Gaussa)

```
>>pokaz( xi, yi, U, Fc1, Fc2 )
```

Powinien pojawić się rysunek:



#### - czwarty przyrost obciążenia

- rozwiązanie układu równań

```
>>du=k\df
```

- agregacja przyrostu odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>dU = [0;0;0;0;0;0;0;du]
```

- agregacja całkowitych odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>U = U + dU
```

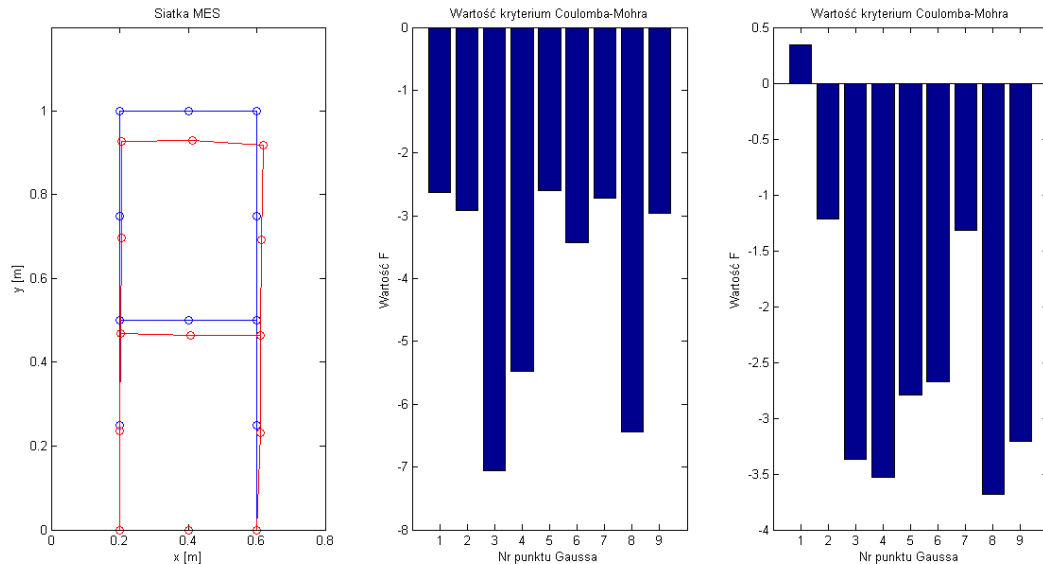
- wyznaczenie stanu odkształceń i naprężeń dla każdego elementu niezależnie

```
>>[eps1, sig1, Fc1] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, eps1,
sig1, dU, xi, yi )
>>[eps2, sig2, Fc2] = epsigQ8AX( E, ni, Fi, c, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, eps2,
sig2, dU, xi, yi )
```

- graficzna prezentacja wyników (odkształcenia i wartości  $Fmc$  w pkt. Gaussa)

```
>>pokaz( xi, yi, U, Fc1, Fc2 )
```

Powinien pojawić się rysunek:



W pierwszym punkcie Gaussa w drugim elemencie wartość  $F_{mc}$  jest DODATNIA, zatem należy przeprowadzić procedurę redystrybucji obciążeń. Realizujemy ją poleceniami:

- zerujemy przyrosty obciążenia redystrybucyjnego oraz przyrosty odkształceń lepkoplastycznych

```
>>dfr1 = zeros(16,1)
>>dfr2 = zeros(16,1)
>>dfr = zeros(20,1)
>>depsvp1 = zeros(4,9)
>>depsvp2 = zeros(4,9)
```

Proszę wyjaśnić, dlaczego wymiary wektorów i macierzy powyższych zmiennych przyjęły takie wartości.

- zachowujemy aktualny stan przemieszczeń, odkształceń i naprężeń

```
>>U0 = U
>>eps01 = eps1
>>eps02 = eps2
>>sig01 = sig1
>>sig02 = sig2
```

- uaktualniamy przyrost obciążeń o przyrost obciążeń redystrybucyjnych (w tej chwili równy zero)

```
>>dfp = df + dfr
```

- rozwiązujemy układ równań

```
>>du = k\dfp
```

- kompletujemy przyrost odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>dU = [0;0;0;0;0;0;0;du]
```

- obliczamy aktualny stan naprężenia i odkształcenia oraz wektor obciążenia redystrybucyjnego i odkształceń lepkoplastycznych dla każdego elementu osobno

```
>>[eps1, sig1, Fc1, depsvp1, dfr1] = epsigQ8AXpl( E, ni, Fi, c, Psi, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, eps01, sig01, dU, xi, yi, depsvp1, dfr1 );
>>[eps2, sig2, Fc2, depsvp2, dfr2] = epsigQ8AXpl( E, ni, Fi, c, Psi, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, eps02, sig02, dU, xi, yi, depsvp2, dfr2 );
```

- wyznaczamy przyrost obciążeń redystrybucyjnych dla całego układu

```
>>dfr = [ dfr1(3:4); dfr1(5:6)+dfr2(1:2); dfr2(3:4); dfr2(5:6); dfr2(7:8);
dfr2(9:10); dfr2(11:12); dfr1(9:10)+dfr2(13:14); dfr1(11:12);
dfr1(7:8)+dfr2(15:16)]
```

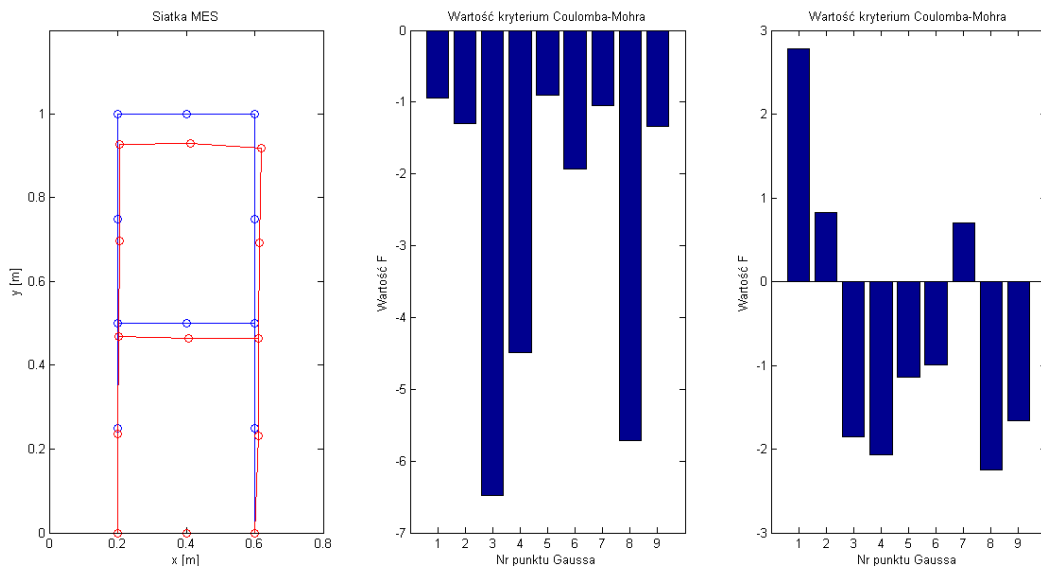
- aktualizujemy przemieszczenia dla całego układu

```
>>U = U0 + dU
```

- wyświetlamy wyniki (przemieszczenia i wartości kryterium w pkt. Gaussa)

```
>>pokaz( xi, yi, U, Fc1, Fc2 );
```

i powinien pojawić się rysunek



Dlaczego przybyło punktów Gaussa z dodatnią wartością  $F_{mc}$ ?

Powtarzamy obliczenia redystrybucji obciążeń.

- uaktualniamy przyrost obciążeń o przyrost obciążeń redystrybucyjnych (w tej chwili NIE JEST JUŻ RÓWNY ZERO)

```
>>dfp = df + dfr
```

- rozwiązujemy układ równań

```
>>du = k\dfp
```

- kompletujemy przyrost odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>dU = [0;0;0;0;0;0;0;du]
```



- obliczamy aktualny stan naprężenia i odkształcenia oraz wektor obciążenia redystrybucyjnego i odkształceń lepkoplastycznych dla każdego elementu osobno

```
>>[eps1, sig1, Fc1, depsvp1, dfr1] = epsigQ8AXpl( E, ni, Fi, c, Psi, 3, 4, 5, 13, 11, 12, 1, 2, eps01, sig01, dU, xi, yi, depsvp1, dfr1 );
>>[eps2, sig2, Fc2, depsvp2, dfr2] = epsigQ8AXpl( E, ni, Fi, c, Psi, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, eps02, sig02, dU, xi, yi, depsvp2, dfr2 );
```

- wyznaczamy przyrost obciążeń redystrybucyjnych dla całego układu

```
>>dfr = [ dfr1(3:4); dfr1(5:6)+dfr2(1:2); dfr2(3:4); dfr2(5:6); dfr2(7:8);
dfr2(9:10); dfr2(11:12); dfr1(9:10)+dfr2(13:14); dfr1(11:12);
dfr1(7:8)+dfr2(15:16)]
```

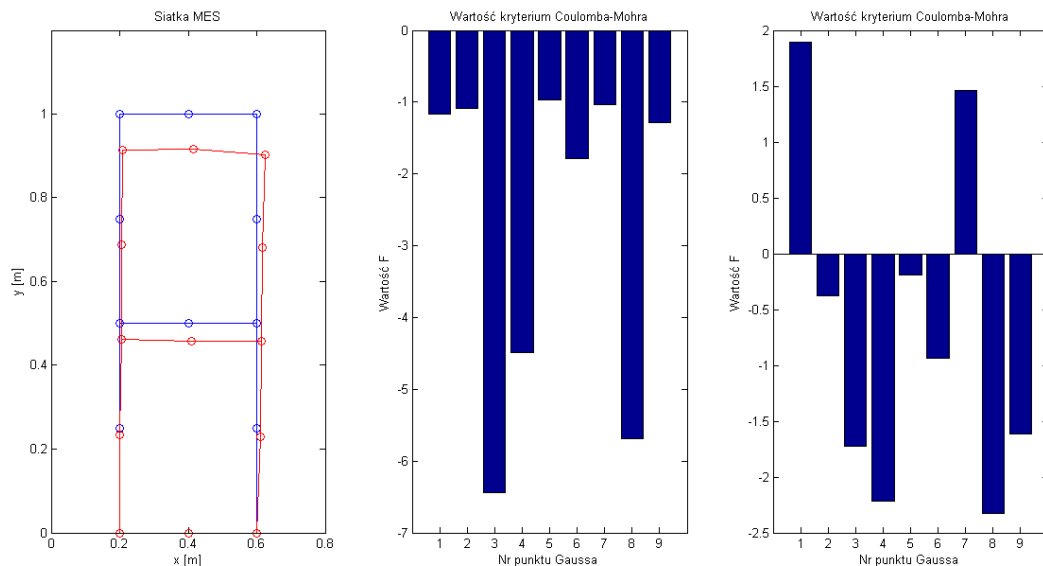
- aktualizujemy przemieszczenia dla całego układu

```
>>U = U0 + dU
```

- wyświetlamy wyniki (przemieszczenia i wartości kryterium w pkt. Gaussa)

```
>>pokaz( xi, yi, U, Fc1, Fc2 );
```

i powinien pojawić się rysunek



Jeszcze raz powtarzamy obliczenia redystrybucji obciążeń.

- uaktualniamy przyrost obciążeń o przyrost obciążeń redystrybucyjnych

```
>>dfp = df + dfr
```

- rozwiązujemy układ równań

```
>>du = k\dfp
```

- kompletujemy przyrost odkształceń w jeden wektor dla całego układu

```
>>dU = [0;0;0;0;0;0;0;du]
```

- obliczamy aktualny stan naprężenia i odkształcenia oraz wektor obciążenia redystrybucyjnego i odkształceń lepkoplastycznych dla każdego elementu osobno

```
>>[eps1, sig1, Fc1, depsvp1, dfr1] = epsigQ8AXpl( E, ni, Fi, c, Psi, 3, 4, 5,
13, 11, 12, 1, 2, eps01, sig01, dU, xi, yi, depsvp1, dfr1 );
>>[eps2, sig2, Fc2, depsvp2, dfr2] = epsigQ8AXpl( E, ni, Fi, c, Psi, 5, 6, 7, 8,
9, 10, 11, 13, eps02, sig02, dU, xi, yi, depsvp2, dfr2 );
```

- wyznaczamy przyrost obciążeń redystrybucyjnych dla całego układu

```
>>dfr = [ dfr1(3:4); dfr1(5:6)+dfr2(1:2); dfr2(3:4); dfr2(5:6); dfr2(7:8);
dfr2(9:10); dfr2(11:12); dfr1(9:10)+dfr2(13:14); dfr1(11:12);
dfr1(7:8)+dfr2(15:16) ]
```

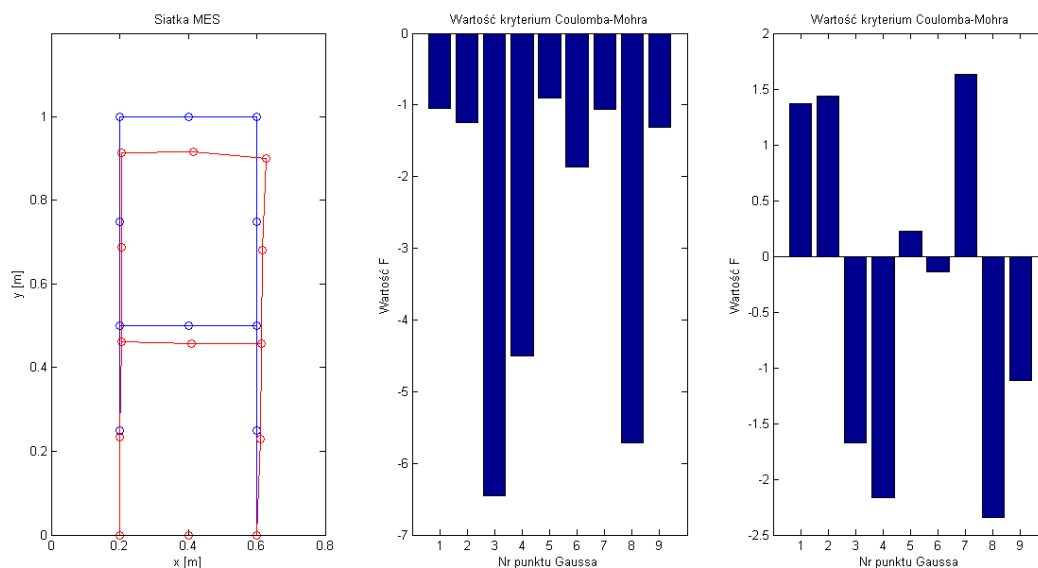
- aktualizujemy przemieszczenia dla całego układu

```
>>U = U0 + dU
```

- wyświetlamy wyniki (przemieszczenia i wartości kryterium w pkt. Gaussa)

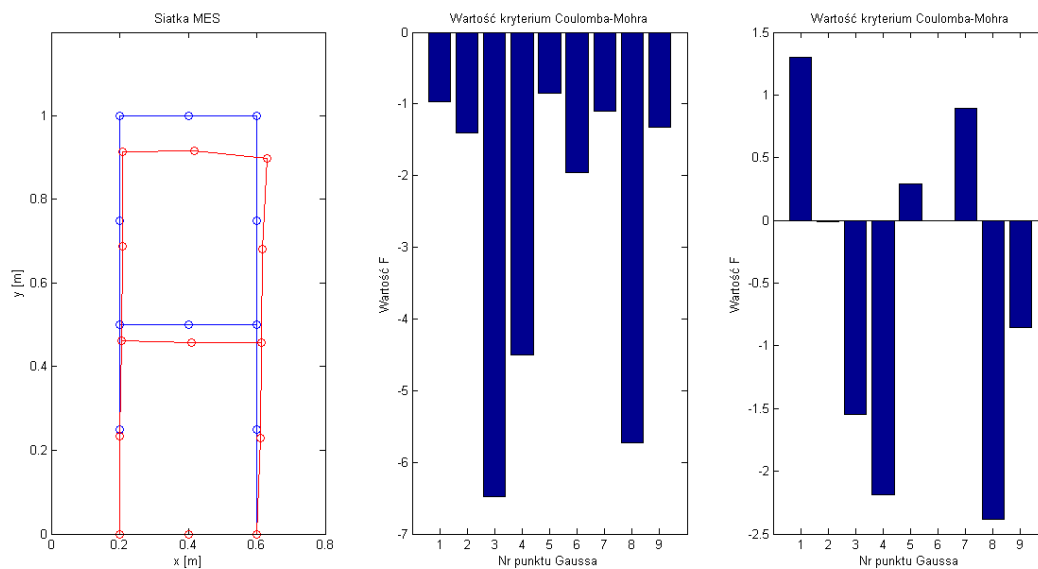
```
>>pokaz( xi, yi, U, Fc1, Fc2 );
```

i powinien pojawić się rysunek

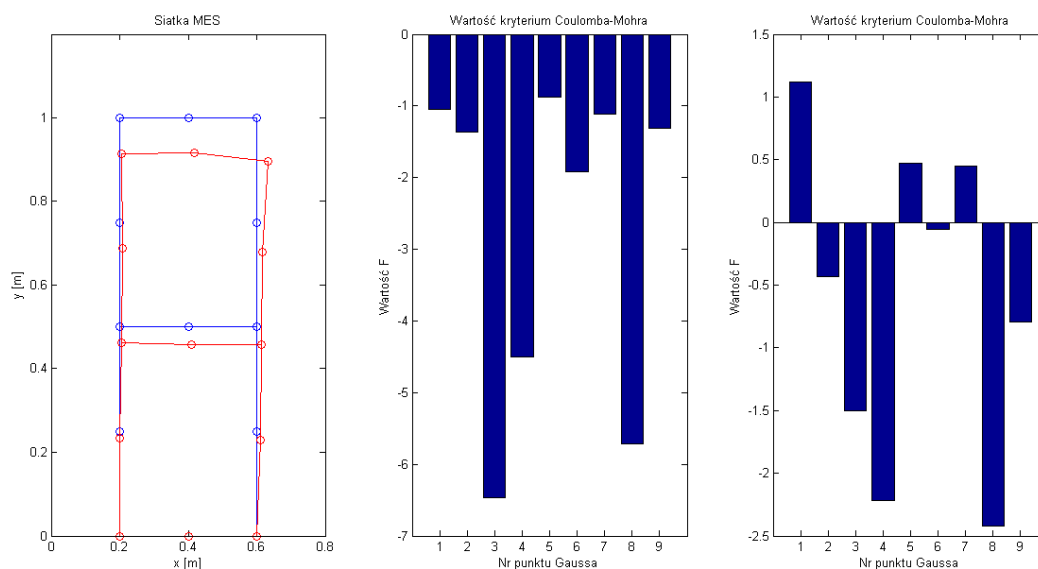


Kolejne powtórzenia powinny dać w efekcie:

- po czwartej iteracji:



- po piątej iteracji:



Można zauważyć, że maksymalne wartości  $F_{mc}$  stają się coraz mniejsze.

## Zadanie 2

**Ile razy należy wykonać redystrybucję obciążeń, aby maksymalna wartość  $F_{mc}$  była niższa od 0.5?**