

M7: Opis ćwiczenia

Modelowanie właściwości elektrycznych obiektów biologicznych. Badanie szeregowego układu elementów RLC

Literatura:

- William Moebs, Samuel J. Ling, Jeff Sanny, *Fizyka dla szkół wyższych, Tom 2*, Wyd. OpenStax, R. 2017, **Rozdziały 5-15**. <https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-2/pages/5-wstep>
- Halliday D., Resnick R., Walker J. *Podstawy Fizyki*, PWN, wyd. 2, tom 3
- Drabent R., Machholz Z., Siódmiak J., Wieczorek Z., *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, Wyd. UWM, R. 2017. **Rozdział 5**, strony: 200 – 208 i 245 – 255.



Zagadnienia:

- Podstawy elektrodynamiki: elektryczność – prawo Coulomba, kwantyzacja ładunku, zasada zachowania ładunku (21.1-3), pole elektryczne, wektor natężenia pola elektrycznego (22.1-2), potencjał elektryczny, elektryczna energia potencjalna (24.1, 24.3).
- Podstawy elektrodynamiki: magnetyzm – pole magnetyczne, siła działająca na ładunek poruszający się w polu magnetycznym, wektor indukcji magnetycznej (28.1).
- Prąd elektryczny, prawa dotyczące przepływu prądu elektrycznego – definicja prądu elektrycznego (26.1), opór elektryczny (26.3), prawo Ohma (26.4), moc w obwodach elektrycznych (26.5), prąd stały, prąd przemienny (częstotliwość prądu).
- Cewka indukcyjna w obwodzie prądu stałego i przemiennego – budowa cewki indukcyjnej, indukcyjność i samoindukcja, prawo indukcji Faradaya (30.1, 30.4, 30.5).
- Kondensator w obwodzie prądu stałego i przemiennego – budowa kondensatora, pojemność kondensatora, wpływ dielektryka na pojemność kondensatora, związek pomiędzy ładunkiem zgromadzonym na okładkach kondensatora, a przyłożonym napięciem, jak zachowuje się kondensator w obwodzie prądu stałego, a jak w obwodzie prądu przemiennego (25.1, 25.5).
- Zawada obwodu RLC i zjawisko rezonansu – definicja zawady oraz jej związek z częstością rezonansową obwodu.
- Modelowanie podstawowych struktur biologicznych, model elektryczny błony komórkowej.

Wymagane umiejętności:

- czytanie schematów prostych obwodów elektrycznych
- obsługa uniwersalnych mierników elektrycznych
- umiejętność posługiwania się pakietem Microsoft Excell.

Cel ćwiczenia:

Wyznaczenie oporu biernego R , indukcyjności cewki L , pojemności kondensatora C oraz częstotliwości rezonansowej szeregowego obwodu RLC

Podstawowe definicje:

Prąd elektryczny to uporządkowany (kierunkowy) ruch ładunków elektrycznych w przewodniku, półprzewodniku, elektrolicie lub w próżni.

Natężenie prądu elektrycznego I to ilość ładunku elektrycznego ΔQ przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika w jednostce czasu Δt .

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Jednostką natężenia jest A (amper).

Potencjałem elektrycznym V w dowolnym punkcie P stałego pola elektrycznego nazywa się stosunek pracy W wykonanej przez siłę elektryczną przy przenoszeniu ładunku q z tego punktu do nieskończoności, do wartości tego ładunku.

$$V_p = \frac{W_{P \rightarrow \infty}}{q}$$

Jednostką potencjału elektrycznego jest V (volt). **Napięcie elektryczne** to stosunek pracy wykonanej nad ładunkiem q przemieszczającym się z punktu A do punktu B do wartości tego ładunku

$$U = \frac{W_{A \rightarrow B}}{q},$$

Ponieważ wartości potencjałów elektrycznych w punktach A i B różnią się od siebie a praca nad ładunkiem jest wykonywana do momentu zubożenia ładunków, napięcie jest różnicą potencjałów elektrycznych pomiędzy dwoma punktami. Jednostką napięcia elektrycznego jest V [volt].

Pojemność kondensatora C to stosunek ładunku zgromadzonego na okładkach Q do napięcia (różnicy potencjałów) między nimi U .

$$C = \frac{Q}{U}$$

Jednostką pojemności jest F (farad).

Opór elektryczny R to wielkość fizyczna określająca, w jakim stopniu dany element obwodu elektrycznego przeciwstawia się przepływowi prądu elektrycznego.

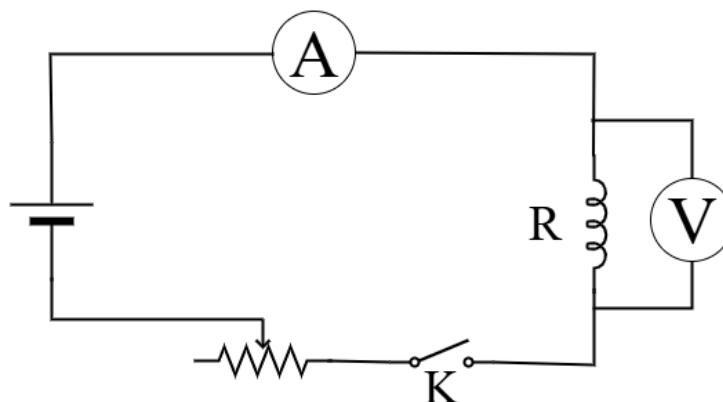
$$R = \frac{U}{I}$$

Jednostką oporu jest Ω (om).

Indukcyjność to właściwość obwodu elektrycznego (lub jego elementu, np. cewki), polegająca na wytwarzaniu siły elektromotorycznej (SEM) przeciwdziałającej zmianom prądu płynącego w tym obwodzie.

Opis metody pomiarowej:

Obwód numer 1 (prąd stały):

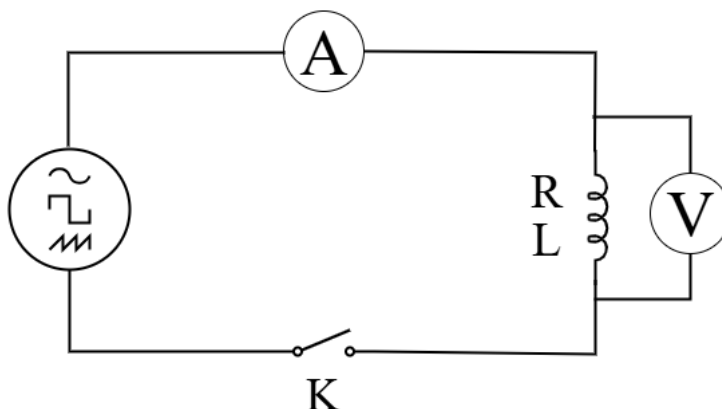


Celem tej części eksperymentu jest wyznaczenie oporu biernego **R** znajdującej się w zestawie cewki indukcyjnej. Opór bierny obliczamy dokonując pomiarów natężenia prądu I za pomocą amperomierza, różnicy potencjałów (napięcia U) pomiędzy końcówkami cewki indukcyjnej, a następnie korzystając z definicji oporu elektrycznego:

$$R = \frac{U}{I} \quad (1)$$

Należy wykonać kilka pomiarów (np. 3-4 pomiary) zmieniając napięcie na cewce indukcyjnej za pomocą opornicy suwakowej.

Obwód numer 2 (prąd przemienny):



Celem tej części eksperymentu jest wykreślenie zależności reaktancji indukcyjnej R_L w funkcji częstotliwości prądu przemiennego f w zakresie od 50 Hz do 200 Hz co 10 Hz. Zawada (całkowity opór) cewki indukcyjnej składa się z wyznaczonej za pomocą obwodu 1 części biernej (R) oraz części aktywnej - zależnej od częstotliwości prądu reaktancji indukcyjnej

$$R_L = 2\pi fL \quad (2)$$

Całkowity opór (zawada) obwodu nr 2 nie jest jednak prostą sumą oporu czynnego i biernego (jest mniejszy od tej sumy) i wynosi

$$Z_L = \sqrt{R^2 + R_L^2} \quad (3)$$

Równanie powyższe możemy przekształcić i wyznaczyć z niego reaktancję indukcyjną

$$R_L = \sqrt{Z_L^2 - R^2} \quad (4)$$

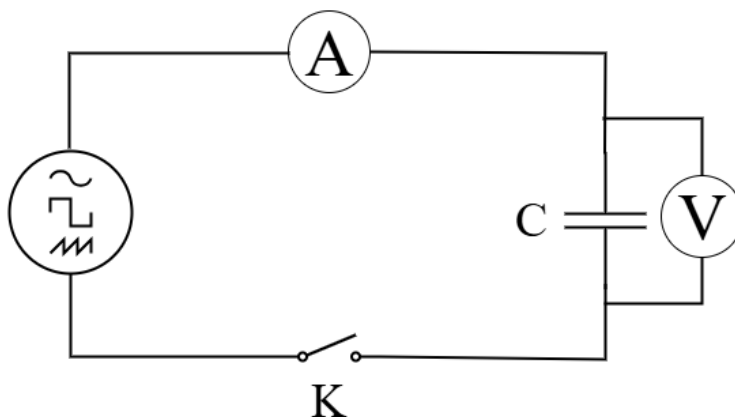
Z_L obliczamy dla różnych wartości częstotliwości prądu, korzystając z definicji oporu elektrycznego $Z_L(f) = U/I$, przy czym napięcie U oraz natężenie prądu I są wielkościami bezpośrednio mierzonymi. Następnie korzystając z równania (4) wyznaczamy zależność reaktancji indukcyjnej R_L od częstotliwości prądu f . Zgodnie z równaniem (2) reaktancja indukcyjna rośnie w sposób liniowy wraz ze wzrostem częstotliwości prądu f . Dlatego kolejne wartości R_L powinny układać się na wykresie na linii prostej i metodą regresji możemy dopasować do nich funkcję liniową:

$$R_L(f) = a \cdot f \quad (5)$$

W wyniku dopasowania otrzymujemy współczynnik kierunkowy a wraz z niepewnością $u(a)$. Z porównania równań (2) i (5) wynika, że $a = 2\pi L$, co pozwala na wyznaczenie indukcyjności cewki wraz z niepewnością

$$L = \frac{a}{2\pi} \quad u(L) = \frac{u(a)}{2\pi} \quad (6)$$

Obwód numer 3 (prąd przemienny):



Celem tej części ćwiczenia jest wyznaczenie zależności reaktancji pojemnościowej R_C w funkcji częstotliwości prądu przemiennego w zakresie od 50 Hz do 200 Hz, co 10 Hz. Z uwagi na brak oporu biernego w badanym obwodzie całkowity opór (zawada) równa jest reaktancji pojemnościowej

$$Z_C = R_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad (7)$$

Z_C obliczamy dla kolejnych częstotliwości korzystając z definicji oporu elektrycznego $Z_C = U/I$, gdzie napięcie U oraz natężenie I są wielkościami bezpośrednio mierzonymi.

Zgodnie z równaniem (7) zależność reaktancji pojemnościowej od częstotliwości ma charakter hiperboliczny i dlatego do punktów doświadczalnych należy dopasować metodą najmniejszych kwadratów krzywą o następującej postaci

$$R_C(f) = \frac{b}{f} \quad (8)$$

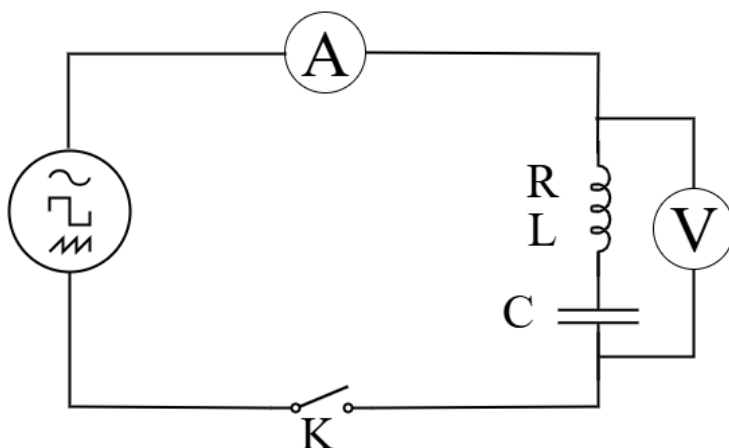
W wyniku dopasowania otrzymujemy współczynnik b wraz z niepewnością $u(b)$. Porównanie równań (7) i (8) prowadzi do wniosku, że

$$b = \frac{1}{2\pi C} \quad (9)$$

co pozwala na wyznaczenie pojemności kondensatora wraz z niepewnością (metoda niepewności złożonych)

$$C = \frac{1}{2\pi b} \quad u(C) = C \frac{u(b)}{b} \quad (10)$$

Obwód numer 4 (prąd przemienny):



Celem tej części ćwiczenia jest wyznaczenie zależności zawady szeregowego obwodu RLC w funkcji częstotliwości prądu przemiennego w zakresie od 50 Hz do 200 Hz, co 10 Hz. Szeregowe połączenie reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej nie prowadzi do prostego zsumowania się oporów, tak jak ma to miejsce w przypadku łączenia oporników w obwodach prądu stałego. Wymiana energii pomiędzy kondensatorem, a cewką indukcyjną prowadzi do zmniejszenia całkowitego oporu układu, który wyraża się następującym wzorem

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (11)$$

Zgodnie z równaniami (5) oraz (7) reaktancja indukcyjna rośnie, a reaktancja pojemnościowa maleje wraz ze wzrostem częstotliwości prądu. Dla pewnej wartości częstotliwości, zwanej częstotliwością rezonansową f_r , dochodzi do zrównania się wartości R_L oraz R_C , w wyniku czego zawada osiąga wartość minimalną równą oporowi biernemu R obwodu. Wartość częstotliwości rezonansowej wynika z przyrównania R_L oraz R_C

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C} \quad (12)$$

stąd

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (13)$$

W tej części ćwiczenia obliczamy Z dla kolejnych częstotliwości korzystając z definicji oporu elektrycznego $Z = U/I$, gdzie napięcie U oraz natężenie I są wielkościami bezpośrednio mierzonymi.

Zgodnie z równaniami (2), (6) i (11) zależność reaktancji pojemnościowej od częstotliwości ma bardziej skomplikowany charakter niż w obwodach (2) i (3)

$$Z(f) = \sqrt{c^2 + \left(af - \frac{b}{f}\right)^2} \quad (14)$$

W wyniku dopasowania metodą najmniejszych kwadratów funkcji (11) do punktów doświadczalnych otrzymujemy zestaw trzech parametrów a, b, c wraz z niepewnościami $u(a), u(b), u(c)$, co pozwala na wyznaczenie oporu biernego wraz z niepewnością

$$R = c \quad u(R) = u(c) \quad (15)$$

indukcyjności cewki zgodnie z równaniem (6) oraz pojemności kondensatora zgodnie z równaniem (10), wraz z niepewnościami. Wartości otrzymane w obwodzie 4 powinny zgadzać się z wartościami otrzymanymi w obwodach 1-3 w granicach niepewności.

Wyniki dopasowania krzywej (14) pozwalają na dokładne wyznaczenie częstotliwości rezonansowej wraz z niepewnością

$$f_r = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad u(f_r) = \frac{f_r}{2} \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2} \quad (16)$$

Niepewności:

Obwód numer 1:

Dla każdego pomiarów obliczyć:

$$\Delta U(V) = \frac{0,5\% \times \text{wskazanie (V)}}{100\%} + 0,01V$$

$$\Delta I(\text{mA}) = \frac{2\% \times \text{wskazanie (mA)}}{100\%} + 0,1\text{mA}$$

Wartość średniej arytmetycznej dla 3 pomiarów oporu biernego :

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}$$

Obliczamy odchylenie standardowe średniej arytmetycznej:

$$s(\bar{R}) = \sqrt{\frac{(R_1 - \bar{R})^2 + (R_2 - \bar{R})^2 + (R_3 - \bar{R})^2}{6}}$$

oraz niepewność z rozkładu t-Studenta dla 2 stopni swobody i poziomu ufności 66%

$$u(R) = 1,128 \cdot s(\bar{R})$$

Obwód numer 2:

W wyniku dopasowania hiperboli opisanej równaniem (8) otrzymujemy współczynnik kierunkowy b wraz z niepewnością $u(b)$.

Dla pojemności kondensatora, której zależność od parametru b określona jest równaniem

$$C = \frac{1}{2\pi b}$$

korzystamy z metody szacowania niepewności złożonych, która w tym przypadku przyjmuje następującą formę:

$$u(C) = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial b} u(b)\right)^2}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial C}{\partial b} = -\frac{1}{2\pi b^2}$$

niepewność wyznaczenie indukcyjności wynosi

$$u(C) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2\pi b^2} u(b)\right)^2} = \frac{1}{2\pi b} \sqrt{\left(-\frac{u(b)}{b}\right)^2}$$

Stąd

$$u(C) = C \frac{u(b)}{b}$$

Obwód numer 3:

W wyniku dopasowania linii prostej opisanej równaniem (5) otrzymujemy współczynnik kierunkowy a wraz z niepewnością $u(a)$.

Dla indukcyjności, której zależność od parametru a określona jest równaniem

$$L = \frac{a}{2\pi}$$

korzystamy z metody szacowania niepewności złożonych, która w tym przypadku przyjmuje następującą formę:

$$u(L) = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial a} u(a)\right)^2}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{1}{2\pi}$$

niepewność wyznaczenie indukcyjności wynosi

$$u(L) = \frac{u(a)}{2\pi}$$

Obwód numer 4:

W wyniku dopasowania krzywej opisanej równaniem (14) otrzymujemy parametry a, b, c wraz z niepewnościami $u(a), u(b), u(c)$.

Częstotliwość rezonansową można policzyć z parametrów a i b

$$f_r = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Niepewność częstotliwości rezonansowej obliczamy korzystając ze wzoru na niepewności złożone:

$$u(f_r) = \sqrt{\left(\frac{\partial f_r}{\partial a} u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial f_r}{\partial b} u(b)\right)^2}$$

Pochodne wynoszą:

$$\frac{\partial f_r}{\partial a} = -\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{b}{a}} = -\frac{f_r}{2a}$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial b} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{f_r}{2b}$$

Stąd

$$u(f_r) = \sqrt{\left(-\frac{f_r}{2a} u(a)\right)^2 + \left(\frac{f_r}{2b} u(b)\right)^2}$$

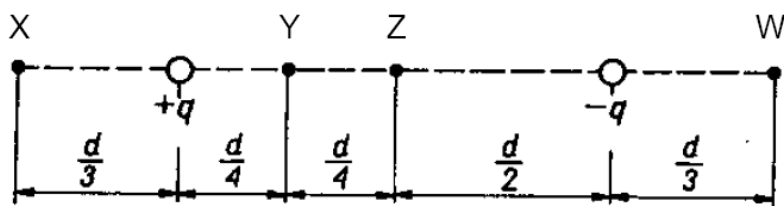
Czyli

$$u(f_r) = \frac{f_r}{2} \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$$

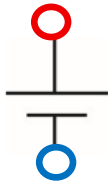
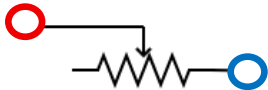
Jak widać niepewność wyznaczenia częstotliwości rezonansowej zależy od jej wartości oraz niepewności względnych wyznaczenia parametrów a i b .

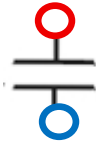
Pytania i zadania:

1. Narysuj wykresy zależności natężenia i napięcia od czasu dla prądu stałego i prądu przemiennego.
2. Podaj definicję oporu elektrycznego oraz sformułuj prawo Ohma.
3. Ile ciepła wydzieli się w czasie t na oporniku o oporze R przez który przepływa prąd stały o natężeniu I ?
4. Jak zbudowana jest cewka indukcyjna i jaką rolę pełni w obwodzie prądu przemiennego?
5. Jak zbudowany jest kondensator i jaką rolę pełni w układzie prądu przemiennego?
6. Na czym polega rezonans w szeregowym obwodzie RLC?
7. Podaj wzór na zawadę szeregowego obwodu RLC i na jego podstawie wyznacz częstotliwość rezonansową.
8. Narysuj schemat modelu elektrycznego błony komórkowej. Jakim zjawiskom zachodzącym w błonie odpowiadają poszczególne elementy?
9. Podaj definicje napięcia i natężenia skutecznego prądu przemiennego.
10. Podaj wyrażenie na energię potencjalną oddziaływania pomiędzy jonem A o ładunku Q_A i jonem B o ładunku Q_B w ośrodku o przenikalności elektrycznej ϵ , jeśli odległość między nimi wynosi d ?
11. Dwa równe ładunki o przeciwnych znakach wytwarzają pole elektrostatyczne: (d - odległość między ładunkami). W którym z punktów X, Y, Z lub W natężenie pola elektrycznego ma największą wartość? W którym z punktów X, Y, Z lub W potencjał elektryczny ma największą wartość?



12. Przedstaw jednostkę oporu elektrycznego w jednostkach wielkości podstawowych układu SI.
13. Zmiana natężenia prądu o $I \text{ A}$ w obwodzie o współczynniku samoindukcji $0,08 \text{ H}$ indukuje SEM 4 V . W jakim czasie nastąpiła ta zmiana?
14. Ile wynosi wartość skuteczna natężenia prądu płynącego w szeregowym obwodzie RLC zasilanym napięciem $U = U_0 \sin(\omega t)$ (gdzie: $R = 10 \Omega$, $L = 0,05 \text{ H}$, $C = 25 \mu\text{F}$, $U_0 = 50 \text{ V}$, $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$)?

Nazwa	Zdjęcie elementu	Symbol
Zasilacz prądu stałego		
	Urządzenie elektroniczne generujące stałą różnicę potencjałów pomiędzy złączami oznaczonymi na zdjęciu kolorem czerwonym (+) oraz niebieskim (-). Pokrętkiem znajdującym się po prawej stronie można ustawić żadaną różnicę potencjałów.	
Generator prądu przemiennego		
	Urządzenie elektroniczne generujące prąd przemienny w obwodzie elektrycznym. Przyłącza znajdują się w prawym dolnym rogu urządzenia. Duże pokrętło z lewej strony służy do regulacji częstotliwości prądu.	
Opornica suwakowa		
	Opornik o zmiennej oporności podłączamy do obwodu za pomocą złączy widocznych w lewym górnym i prawym dolnym rogu opornika. Suwak widoczny w górnej części urządzenia służy do regulacji oporu.	
Cewka indukcyjna		

	Element obwodu elektrycznego zbudowany z długiego drutu nawiniętego spiralnie na metalowy rdzeń. W obwodach prądu stałego element ten pełni funkcję opornika (R), natomiast w obwodach prądu przemiennego powoduje pojawienie się reakcji pojemnościowej – dodatkowego oporu, zależnego od indukcyjności cewki (L) oraz częstotliwości prądu (f).	
Kondensator		
	Element obwodu elektrycznego zbudowany z dwóch przewodników oddzielonych warstwą dielektryka. Element ten stanowi przerwę w obwodzie prądu stałego, natomiast w obwodzie prądu przemiennego stawia opór zwany reaktancją pojemnościową, która zależy od częstotliwości prądu i pojemności kondensatora	
Wyłącznik		